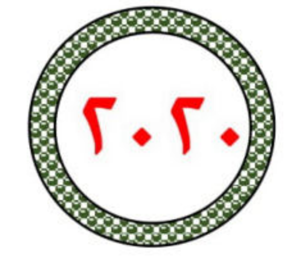
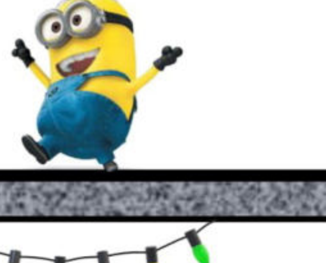
مدرسة مصر الخير الإعدادية بجهينة - سوهاج



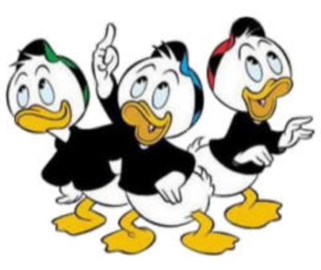
الصف الثالث الإعدادي



إهداء إلى الطالبة	



ملزمة الجبر والإحصاء









معلم أول رياضيات

انت أقوى من الجبر



◆ الوحدة الأولى : المعادلات

◆ الوحدة الثانية : الكسور الجبرية

◆ الوحدة الثالثة : الإحصاء

مراجعة على التحليل

التحليل بإخراج العامل المشترك

❖ س^{٢} − ٤ س = س (س − ٤)

❖ ٣س − ١٥ = ٣ (س − ٥)

❖ ٤ص + ٢٤ = ٤ (ص + ٦)

❖ س^{٤} − س = س (س^{٣} − ١)

❖ ٢س^{٣} + ٦س = ٢س (س^{٢} +٣)

❖ س^{٣} − س^{٢} + س = س (س^{٢} − س + ١)

◆ س^{٢} − ٢س = ...

◆ س^{٢} − س = ...

◆ ٢س - ٦ = ...

◆ س^{٣} − س^{٢} = ...

◆ ٢س^{٣} − ١٨س = ...

◆ س^{٤} + س^{٣} + س^{٢} = ...

الفرق بين مربعين

أعداد لها جذور تربيعية مثل:
١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ٤٩

هو عبارة عن حدين لهما جذور تربيعية وبينهم (−) مثل : س^{٢} − ٢٥ ولو لقيت بينهم (+) ملوش تحليل

تحليل الفرق بين مربعين = ($\sqrt{}$الأول − $\sqrt{}$الثانى) ($\sqrt{}$الأول + $\sqrt{}$الثانى)

❖ س^{٢} − ٤ = (س − ٢) (س + ٢)

❖ س^{٢} − ١ = (س − ١) (س + ١)

❖ ٤س^{٢} − ٩ = (٢س − ٣) (٢س + ٣)

❖ ص^{٢} − ٨١ = (ص − ٩) (ص + ٩)

◆ س^{٢} − ٩ = ...

◆ س^{٢} − ١٦ = ...

◆ س^{٢} − ٣٦ = ...

◆ ص^{٢} − ٢٥ = ...

مجموع مكعبين والفرق بينهما

الأعداد التي لها جذور تكعيبية مثل:
١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ١٢٥

❖ س^{٣} − ١ = (س − ١) (س^{٢} + س +١)

❖ س^{٣} + ١ = (س + ١) (س^{٢} − س +١)

◆ س^{٣} − ٢٧ = ...

◆ س^{٣} + ٨ = ...

تحليل المقدار الثلاثى البسيط س^{٢}+ ب س+ جـ

<u>قاعدة الإشارات:</u> إذا كانت إشارة الأخير (+) يبقى الإشارتين زى إشارة الأوسط

إذا كانت إشارة الأخير (-) يبقى الإشارتين مختلفتين والرقم الأكبر ياخد إشارة الأوسط

❖ س^{٢} +٥س +٦ = (س + ٢) (س + ٣)

❖ س^{٢} − ٣س +٢ = (س − ٢) (س − ١)

❖ س^{٢} + س − ١٢ = (س + ٤) (س − ٣)

❖ س^{٢} − ٢س − ١٥ = (س − ٥) (س + ٣)

◆ س^{٢} +٤س +٤ = ...

◆ س^{٢} − ٦س +٩ = ...

◆ س^{٢} + س −٦ = ...

◆ س^{٢} − س + ١ = ...



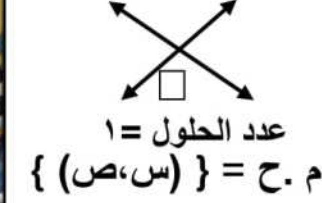
حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين

إذا كان المعادلتين على الصورة : **أ$_١$ س + ب$_١$ ص = جـ$_١$ ، أ$_٢$ س + ب$_٢$ ص = جـ$_٢$** فإن :

لهما حل وحيد

إذا كان $\frac{أ_١}{أ_٢} \neq \frac{ب_١}{ب_٢}$

أو: **المستقيمان متقاطعان**



عدد الحلول = ١

م .ح = { (س،ص) }

لهما عدد لا نهائى

إذا كان $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$

أو المستقيمان منطبقان

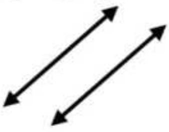


م.ح = { (س،ص): اكتب أي معادلة من الاتنين }

ليس لهما حلول

إذا كان $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} \neq \frac{جـ_١}{جـ_٢}$

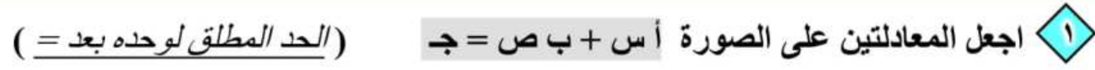
أو المستقيمان متوازيان



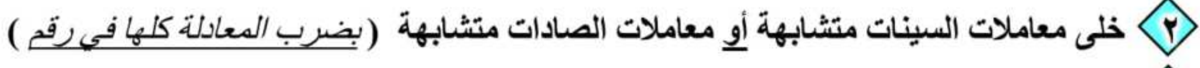
م. ح = Φ

عدد الحلول = ٠

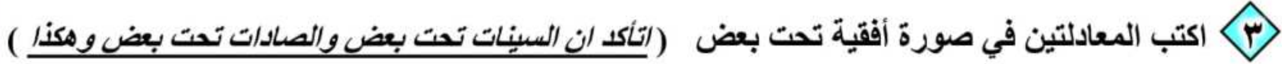
الحل الجبرى بطريقة الحذف



١. اجعل المعادلتين على الصورة أ س + ب ص = جـ (*الحد المطلق لوحده بعد =*)



٢. خلى معاملات السينات متشابهة أو معاملات الصادات متشابهة (*بضرب المعادلة كلها في رقم*)



٣. اكتب المعادلتين في صورة أفقية تحت بعض (***اتأكد ان السينات تحت بعض والصادات تحت بعض وهكذا***)

٤. لو المتشابهين ليهم نفس الإشارة **اطرح** المعادلتين ولو إشاراتهم مختلفة **اجمع** المعادلتين.

٥. هات قيمة المجهول وعوّض عنها في أي معادلة هتجيلك قيمة المجهول التانى.

الحل الجبرى بطريقة التعويض

١. من إحدى المعادلتين هات قيمة ص بدلالة س أو قيمة س بدلالة ص

٢. عوّض في المعادلة الثانية بالقيمة اللى جبتها

٣. فك الأقواس واجمع المتشابه

٤. احسب قيمة المجهول وعوّض بيها في أي معادلة هتجيلك قيمة المجهول الثانى

مثال على طريقة التعويض: حل المعادلتين س + ص = ٤ ، س + ٢ص = ٥

الحل ص = ٤ − س بالتعويض في الثانية ∴ س + ٢ (٤ − س) = ٥ س + ٨ − ٢س = ٥

− س = −٣ ∴ س = ٣ بالتعويض في الأولى ∴ ص = ٤ − ٣ = ١ م.ح = { (٣ ، ١) }

تصميم محمود عوض
معلم اول رياضيات

إعداد/ محمود عوض حسن

أمثلة محلولة

١ أوجد مجموعة حل المعادلتين :

٢س ـ ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤

الحل

بضرب المعادلة الأولى × ٢

٤س ـ ٢ص = ٦

س + ٢ص = ٤ (+) بالجمع

٥س = ١٠

∴ س = ٢ بالتعويض في المعادلة الثانية

٢ + ٢ص = ٤ ⟸ ٢ص = ٢ ⟸ ص = ١

م . ح = { (٢ ، ١) }

٢ أوجد مجموعة حل المعادلتين :

٣س + ٤ص = ٢٤ ، س ـ ٢ص + ٢ = ٠

الحل نظبط شكل المعادلة الثانية : س ـ ٢ص = ـ٢

بضرب المعادلة الثانية × ٣

٣س ـ ٦ص = ـ٦

٣س + ٤ص = ٢٤ (ـ) بالطرح

ـ١٠ص = ـ٣٠

∴ ص = ٣ بالتعويض في المعادلة الثانية

س ـ ٢×٣ +٢ = ٠ ⟸ س ـ ٤ = ٠ ∴ س = ٤

م . ح = { (٤ ، ٣) }

ملحوظة بجنيه

لما تطرح إطرح الرقمين بإشارتهم : يعنى مثلا في مثال ٢ هتقول : ـ٦ ـ ٤

نفس الكلام في الجمع ،، خلاصة الكلام اتعامل مع الأرقام بإشاراتها

٣ أوجد قيمتى أ ،ب علمًا بأن (٣، ـ١) حلا للمعادلتين:

أ س + ب ص ـ ٥ = ٠ ، ٣أ س + ب ص = ١٧

الحل

∵ (٣ ، ـ١) حل للمعادلة أ س + ب ص ـ ٥ = ٠

نعوض عن س = ٣ ، ص = ـ١

∴ أ×٣ +ب ×ـ١ ـ ٥ = ٠ ∴ ٣أ ـ ب = ٥ ⟵ (١)

∵ (٣ ، ـ١) حل للمعادلة ٣أ س + ب ص = ١٧

نعوض عن س = ٣ ، ص = ـ١

٣أ× ٣ + ب×ـ١ = ١٧ ∴ ٩أ ـ ب = ١٧ ⟵ (٢)

٩أ ـ ب = ١٧

٣أ ـ ب = ٥ (ـ) بالطرح

٦أ = ١٢

∴ أ = ٢ بالتعويض في ١

∴ ٣×٢ ـ ب =٥

∴ ٦ ـ ب =٥ ∴ ب = ١

٤ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم ، فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم فأوجد مساحته.

الحل

نفرض أن الطول = س والعرض = ص

∵الطول يزيد عن العرض ∴ الطول ـ العرض = الزيادة

∴ س ـ ص = ٤

∵ المحيط = ٢٨ ، ∵محيط المستطيل = ٢ (الطول+العرض)

∴ ٢ (س + ص) = ٢٨ بالقسمة على ٢

∴ س + ص = ١٤

س ـ ص = ٤

س + ص = ١٤ (+) بالجمع

٢ س = ١٨ ∴ س = ٩

بالتعويض في س ـ ص = ٤

∴ ٩ ـ ص = ٤ ∴ ص = ٥

المساحة = الطول × العرض = ٩ × ٥ = ٤٥ سم^2

١ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين :

س + ٣ص = ٧ ، ٥س ـ ص = ٣

الحل

....

٢ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين :

٣س + ٤ص = ١١ ، ٢س + ص ـ ٤ = ٠

الحل

....

٣ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين :

ص = ١ ـ ٢س ، س + ٢ص = ٥

الحل

جرب تحلها بالطريقتين (الحذف والتعويض)

....

٤ زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠ ، أوجد قياسهما

الحل

....

إعداد/ محمود عوض حسن

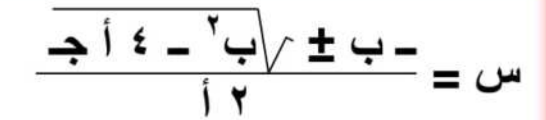


حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد

إذا كانت المعادلة على الصورة : أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ هنستخدم القانون العام:

القانون العام





$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

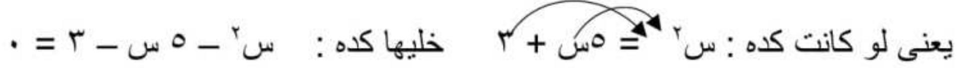


أ : معامل س^{٢}
ب: معامل س
جـ : الحد المطلق

خطوات حل المعادلة :



١ خلى المعادلة على الصورة أ س + ب ص + جـ = صفر (وديهم كلهم قبل يساوى)



يعنى لو كانت كده : س^{٢} = ٥س + ٣ خليها كده : س^{٢} – ٥ س – ٣ = ٠

٢ خد من المعادلة قيم أ ، ب ، جـ بإشارتهم الموجودة في المعادلة



يعنى لو المعادلة كده س^{٢} – ٥س – ٣ = ٠ يبقى أ = ١ ، ب = –٥ ، جـ = –٣



٣ عوض في القانون العام عن قيم أ ، ب ، جـ واحسب اللى تحت الجذر لحد ما يبقى رقم واحد بس

زى كده س = $\frac{٥ \pm \sqrt{(-٥)^{٢} - ٤ \times ١ \times -٣}}{٢ \times ١} = \frac{٥ \pm \sqrt{٣٧}}{٢}$

٤ افصل الناتج مرة بالـ (+) ومرة بالـ (–) واحسب القيمتين بالآلة الحاسبة

زى كده : س = $\frac{٥ + \sqrt{٣٧}}{٢}$ = ٢,٥٤١ و س = $\frac{٥ - \sqrt{٣٧}}{٢}$ = – ٠,٥٤١

٥ اكتب الناتجين في مجموعة الحل

زى كده : م . ح = { ٢,٥٤١ ، – ٠,٥٤١ }

تصميم محمود عوض
معلم اول رياضيات

ملاحظات

ملحوظة ١ : شايف – ب اللى فوق في القانون؟ دى معناها انك تعوض عن ب بس بإشارة مختلفة

ملحوظة ٢ : شايف ٢أ اللى في المقام ؟ شايفها؟ لا دى مفيهاش حاجة ، كويس انك شايفها

ملحوظة ٣ : إذا كان المميز ب^{٢} – ٤أ جـ > صفر (موجب) فإن المعادلة لها جذران

وإذا كان ب^{٢} – ٤أ جـ < صفر (سالب) فإن المعادلة ليس لها حلول ، أي م . ح = Φ

وإذا كان ب^{٢} – ٤أ جـ = صفر فإن المعادلة لها جذر واحد (أو جذران متساويان)



أمثلة محلولة

١ باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية في ح : $٣س^{٢} - ٥س + ١ = ٠$ مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين

الحل

أ = ٣ ، ب = ـ٥ ، جـ = ١

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{٥ \pm \sqrt{٥^{٢} - ٤\times٣\times١}}{٢\times٣}$$

$$= \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ١٢}}{٦} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$$

إما $س = \frac{٥ + \sqrt{١٣}}{٦}$ ∴ $س \cong ١{,}٤٣$

أو $س = \frac{٥ - \sqrt{١٣}}{٦}$ ∴ $س \cong ٠{,}٢٣$

∴ م . ح = { ١,٤٣ ، ٠,٢٣ }

٢ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة $س^{٢} - ٤س + ١ = ٠$ مقربا الناتج لرقمين عشريين

الحل

أ = ١ ، ب = ـ٤ ، جـ = ١

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{٤ \pm \sqrt{٤^{٢} - ٤\times١\times١}}{٢\times١}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٢}}{٢}$$

إما $س = \frac{٤ + \sqrt{١٢}}{٢}$ ∴ $س \cong ٣{,}٧٣$

أو $س = \frac{٤ - \sqrt{١٢}}{٢}$ ∴ $س \cong ٠{,}٢٧$

∴ م . ح = { ٣,٧٣ ، ٠,٢٧ }

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة $س(س - ١) = ٤$ باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لثلاثة أرقام

الحل

الأول لازم نضرب الـ س في القوس

$س^{٢} - س = ٤$ ، $س^{٢} - س - ٤ = ٠$

أ = ١ ، ب = ـ١ ، جـ = ـ٤

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{١ \pm \sqrt{١^{٢} - ٤\times١\times-٤}}{٢\times١}$$

$$= \frac{١ \pm \sqrt{١ - -١٦}}{٢} = \frac{١ \pm \sqrt{١٧}}{٢}$$

إما $س = \frac{١ + \sqrt{١٧}}{٢}$ ∴ $س \cong ٢{,}٥٦٢$

أو $س = \frac{١ - \sqrt{١٧}}{٢}$ ∴ $س \cong -١{,}٥٦٢$

∴ م . ح = { ٢,٥٦٢ ، ـ١,٥٦٢ }

٤ أوجد مجموعة حل المعادلة $(س - ٣)^{٢} - ٥س = ٠$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين

الحل

الأول لازم نفك القوس

$س^{٢} - ٦س + ٩ - ٥س = ٠$

$س^{٢} - ١١س + ٩ = ٠$

أ = ١ ، ب = ـ١١ ، جـ = ٩

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$= \frac{١١ \pm \sqrt{١١^{٢} - ٤\times١\times٩}}{٢\times١}$$

$$= \frac{١١ \pm \sqrt{١٢١ - ٣٦}}{٢} = \frac{١١ \pm \sqrt{٨٥}}{٢}$$

إما $س = \frac{١١ + \sqrt{٨٥}}{٢}$ ∴ $س \cong ١٠{,}١١$

أو $س = \frac{١١ - \sqrt{٨٥}}{٢}$ ∴ $س \cong ٠{,}٨٩$

∴ م . ح = { ١٠,١١ ، ٠,٨٩ }

١ أوجد مجموعة حل المعادلة ٢ س^{٢} ـ ٥س + ١ = ٠

باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد

الحل

أ = ...

ب = ...

جـ = ...

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$س = \frac{...... \pm \sqrt{(...)^{٢} - ..... × ..... × .....}}{٢ × .....}$$

$$= \frac{..... \pm \sqrt{..... - .....}}{.....} = \frac{..... \pm \sqrt{.....}}{.....}$$

إما $س = \frac{..... + \sqrt{.....}}{.....}$ | أو $س = \frac{..... - \sqrt{.....}}{.....}$

∴ س ≅ .... | ∴ س ≅ ....

∴ م . ح = { ٢,٣ ، ٠,٢ } اتأكد بالآلة

٢ أوجد مجموعة حل المعادلة س^{٢} ـ س = ٤

باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد

الحل

مساعدة : اوعى تنسى تنقل الـ ٤ قبل = بإشارة مخالفة

....

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة **٢س^{٢} = ٤س ـ ١**

باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لرقمين عشريين

الحل

....

٤ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة

$$\frac{٨}{س^{٢}} + \frac{١}{س} = ١$$

الحل

مساعدة : للتخلص من الكسور اضرب المعادلة كلها × س^{٢}

....



حل معادلتين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الثانية

تجميع محمود عوض
معلم اول رياضيات

- ابدأ بمعادلة الدرجة الأولى وهات قيمة ص بدلالة س أو قيمة س بدلالة ص
- عوّض في معادلة الدرجة الثانية عن القيمة اللى انت جبتها
- فك الأقواس
- جمع المتشابه (وخلى المعادلة = ٠)
- التحليل (ولو لقيت رقم عامل مشترك اقسم عليه قبل التحليل)
- إما - أو (وهات قيمتين للمجهول)
- عوض عن القيمتين في معادلة الدرجة الأولى وهات قيمتين للمجهول التانى



تدريب على فك الأقواس

(س + ٣)^{٢} = مربع الأول ± الأول × التانى × ٢ + مربع التانى = س^{٢} + ٦س + ٩

إشارة القوس

(س + ٤)^{٢} = ... (ص – ١)^{٢} = ...

س (س + ٣) = س^{٢} + ٣س ـ س (س ـ ٣) = ـ س^{٢} + ٣س

س (س – ٥) = ... ـ ص (١ + ٣ص) = ...

تدريب على جمع المتشابه

- ❑ ١ + ٢ص + ص^{٢} + ص^{٢} ـ ٢٥ = ...
- ❑ ١ + ٤ص + ٤ص^{٢} ـ ص ـ ٢ص^{٢} = ...
- ❑ ص^{٢} + ٢٠ص + ١٠٠ ـ ٤ص^{٢} ـ ٤٠ص + ص^{٢} ـ ٥٢ = ...
- ❑ س^{٢} + س^{٢} + ٦س + ٩ ـ س^{٢} ـ ٣س ـ ١٣ = ...
- ❑ ص^{٢} + ص^{٢} + ص^{٢} = ...

ملحوظة : س ص = ٩ هي معادلة من الدرجة الثانية وليست من الدرجة الأولى

أمثلة محلولة

١

أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين :

س ـ ص = ١ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : س = ١ + ص

بالتعويض عن س = (١+ ص) في معادلة الدرجة الثانية

∴ (١ + ص)^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ — **نفك الأقواس**

١ + ٢ص + ص^{٢} + ص^{٢} ـ ٢٥ = ٠ — **نجمع المتشابه**

٢ص^{٢} + ٢ص ـ ٢٤ = ٠ — **بالقسمة على ٢**

ص^{٢} + ص ـ ١٢ = ٠ — **بالتحليل**

(ص + ٤) (ص ـ ٣) = ٠

إما ص + ٤ = ٠ ∴ ص = ـ٤ | أو ص ـ ٣ = ٠ ∴ ص = ٣

بالتعويض في المعادلة س = ١ + ص

∴ س = ١ + ـ٤ ∴ س = ـ٣ | ∴ س = ١ + ٣ ∴ س = ٤

م . ح = { (ـ٣ ، ـ٤) ، (٤ ، ٣) }

٢

أوجد في ح^{٢} مجموعة حل المعادلتين :

س ـ ص = صفر ، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٢٧

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : س = ص

بالتعويض عن س = ص في معادلة الدرجة الثانية

∴ ص^{٢} + ص^{٢} + ص^{٢} = ٢٧ — **نجمع المتشابه**

٣ص^{٢} = ٢٧ ⟸ ٣ص^{٢} ـ ٢٧ = ٠ — **بالقسمة على ٣**

ص^{٢} ـ ٩ = ٠ — **بالتحليل**

(ص + ٣) (ص ـ ٣) = ٠

إما ص + ٣ = ٠ ∴ ص = ـ٣ | أو ص ـ ٣ = ٠ ∴ ص = ٣

بالتعويض في المعادلة س ـ ص = ٠

∴ س ـ ـ٣ = ٠ ∴ س = ـ٣ | ∴ س ـ ٣ = ٠ ∴ س = ٣

م . ح = { (ـ٣ ، ـ٣) ، (٣ ، ٣) }

٣

أوجد مجموعة حل المعادلتين :

س ـ ٢ص ـ ١ = ٠ ، س^{٢} ـ س ص = ٠

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : س = ١ + ٢ص

بالتعويض عن س = (١ + ٢ص) في معادلة الدرجة الثانية

∴ (١ + ٢ص)^{٢} ـ ص (١ + ٢ص) = ٠ — **نفك الأقواس**

١ + ٤ص + ٤ص^{٢} ـ ص ـ ٢ص^{٢} = ٠ — **نجمع المتشابه**

٢ص^{٢} + ٣ص + ١ = ٠ — **بالتحليل**

(ص + ١) (٢ص +١) = ٠

إما ص + ١ = ٠ ∴ ص = ـ١ | أو ٢ص +١ = ٠ ∴ ص = $\frac{-١}{٢}$

بالتعويض في المعادلة س = ١ + ٢ص

∴ س = ١ + ٢×ـ١ ∴ س = ـ١ | ∴ س = ١ + ٢× $\frac{-١}{٢}$ = ٠

م . ح = { (ـ١ ، ـ١) ، (٠ ، $\frac{-١}{٢}$) }

٤

أوجد مجموعة حل المعادلتين :

س ـ ص = ١٠ ، س^{٢} ـ ٤س ص + ص^{٢} = ٥٢

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : س = ص+١٠

بالتعويض عن س = (ص+١٠) في معادلة الدرجة الثانية

∴ (ص+١٠)^{٢} ـ ٤ص (ص+١٠) + ص^{٢} = ٥٢

ص^{٢} + ٢٠ص + ١٠٠ ـ ٤ص^{٢} ـ ٤٠ص + ص^{٢} ـ ٥٢ = ٠

ـ٢ص^{٢} ـ ٢٠ص + ٤٨ = ٠ — **بالقسمة على ـ٢**

ص^{٢} + ١٠ص ـ ٢٤ = ٠

(ص + ١٢) (ص ـ ٢) = ٠

إما ص + ١٢ = ٠ ∴ ص = ـ١٢ | أو ص ـ٢ = ٠ ∴ ص = ٢

بالتعويض في المعادلة س = ص + ١٠

∴ س = ـ١٢+١٠ ∴ س = ـ٢ | ∴ س = ٢ + ١٠ ∴ س = ١٢

م . ح = { (ـ٢ ، ـ١٢) ، (١٢ ، ٢) }

١ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين

ص ـ س = ٣ ، س^2 + ص^2 ـ س ص = ١٣

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : ....

بالتعويض في معادلة الدرجة الثانية

∴ ....

....

نفك الأقواس

∴ ....

نجمع المتشابه

∴ .... بالتحليل

∴ ....

إما .... | أو ....

∴ .... | ∴ ....

بالتعويض في ....

∴ .... | ∴ ....

.... | ....

∴ م . ح = { (ـ٤ ، ـ١) ، (١ ، ٤) }

٢ مستطيل محيطه ١٤سم ومساحته ١٢ سم^2

أوجد كلا من بعديه

الحل

نفرض أن بُعدا المستطيل هما س ، ص

∵ محيط المستطيل = ٢(الطول + العرض)

∴ ١٤ = ٢(س + ص) بالقسمة على ٢

س + ص = ٧ ومنها ص = ٧ ـ س

∵ مساحة المستطيل = الطول×العرض ∴ س ص = ١٢

بالتعويض عن ص = ٧ ـ س في المعادلة س ص= ١٢

∴ س (٧ ـ س) = ١٢ ٧س ـ س^2 = ١٢

٧س ـ س^2 ـ ١٢ =٠ نرتب ونغير إشارة الكل

س^2 ـ٧س + ١٢ = ٠ (س ـ ٤) (س ـ ٣) = ٠

إما س = ٤ ∴ ص = ٧ ـ ٤ = ٣

أو س = ٣ ∴ ص = ٧ ـ ٣ = ٤

∴ بعدا المستطيل هما ٣سم ، ٤سم

٣ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين :

ص ـ س = ٢ ، س^2 + س ص ـ ٤ = ٠

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

٤ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين :

س +ص =٥ ، س^2 + س ص =١٥

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الحل البيانى للمعادلات

١ ارسم الشكل البيانى للدالة : د(س) = س^٢ ـ ١

في الفترة [ـ٣ ، ٣]

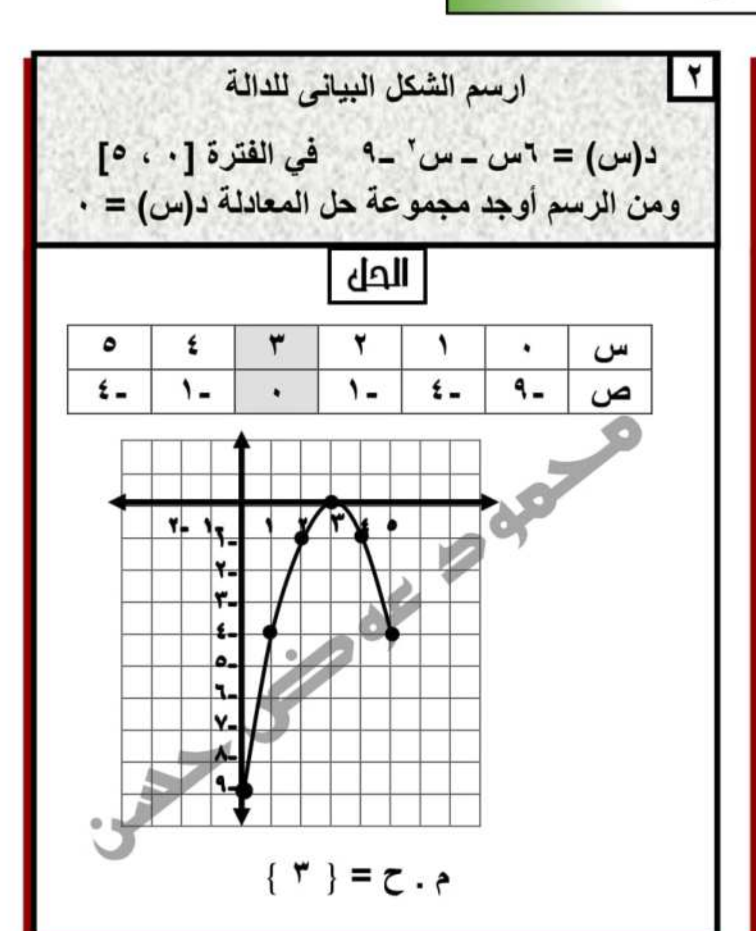
ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س^٢ ـ ١ = ٠

الحل

س	ـ٣	ـ٢	ـ١	٠	١	٢	٣
ص	٨	٣	٠	ـ١	٠	٣	٨

نفس خطوات تمثيل الدالة التربيعية

م . ح = { ـ١ ، ١ }



٢ ارسم الشكل البيانى للدالة

د(س) = ٦س ـ س^٢ ـ٩ في الفترة [٠ ، ٥]

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠

الحل

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	ـ٩	ـ٤	ـ١	٠	ـ١	ـ٤

م . ح = { ٣ }

تصميم محمود عوض
معلم اول رياضيات

٣ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين بيانيا :

ص = س + ٤ ، س + ص = ٤

الحل

ص = س + ٤

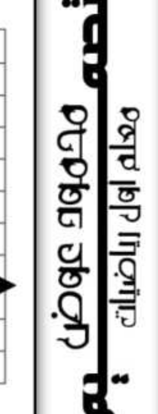
س	ـ١	٠	١
ص	٣	٤	٥

ص = ٤ ـ س

س	٠	١	٢
ص	٤	٣	٢

نفس خطوات تمثيل الدالة الخطية

م . ح = { (٠ ، ٤) }



ملاحظات على الحل البيانى

- مجموعة حل معادلة من الدرجة الثانية بيانيا هي :

قيم س التى يقطعها المنحنى من محور السينات

- إذا لم يقطع المنحنى محور السينات فإن م . ح = Φ

ـ . ـــ . ـــ . ـــ . ـــ . ـــ . ـــ

- مجموعة حل معادلتين من الدرجة الأولى بيانيا هي:

نقطة تقاطع المستقيمين

- إذا توازى المستقيمان فإن م . ح = Φ
- إذا انطبق المستقيمان فإن مجموعة الحل هي:
{ (س ، ص) : واكتب أي معادلة من الاتنين }

أسئلة اختر على الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ نقطة تقاطع المستقيمان ص = ٢ ، س + ص = ٦ هي ....

أ) (٢ ، ٦) ب) (٢ ، ٤) جـ) (٤ ، ٢) د) (٦ ، ٢)

٢ مجموعة حل المعادلتين س ـ ٢ص = ١ ، ٣س + ص = ١٠ هي ....

أ) { (٥ ، ٢) } ب) { (٢ ، ٤) } جـ) { (١ ، ٣) } د) { (٣ ، ١) }

٣ عدد حلول المعادلتين س + ص = ٢ ، ص + س = ٣ هو ....

أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) ٣

الحل $\frac{أ_1}{أ_2}$ = ١ ، $\frac{ب_1}{ب_2}$ = ١ ، $\frac{جـ_1}{جـ_2} = \frac{٢}{٣}$ ∵ $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} \neq \frac{جـ_1}{جـ_2}$ ∴ عدد الحلول = صفر أى : م.ح = Φ

٤ إذا كان للمعادلتين س + ٤ص = ٧ ، ٣س + ك ص = ٢١ عدد لا نهائي من الحلول فإن ك =.......

أ) ٤ ب) ٧ جـ) ١٢ د) ٢١

الحل ∵ للمعادلتين عدد لا نهائي من الحلول ∴ $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}$ ∴ $\frac{١}{٣} = \frac{٤}{ك}$ (مقص) ∴ ك = ١٢

٥ إذا كان للمعادلتين س + ٢ص = ١ ، ٢س + ك ص = ٢ حل وحيد فإن ك لا يمكن أن تساوى .....

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤

الحل $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2}$ ∴ $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{ك}$ (مقص) ∵ للمعادلتين حل وحيد ∴ ك لا يمكن أن تساوى ٤

٦ المستقيمان ٣س + ٥ص = صفر ، ٥س ـ ٣ص = صفر يتقاطعان فى ....

أ) الربع الأول ب) الربع الثانى جـ) نقطة الأصل د) الربع الثالث

٧ مجموعة حل المعادلتين س ـ ص = ٠ ، س ص = ٩ هي ....

أ) { (٠ ، ٠) } ب) { (-٣ ، -٣) } جـ) { (٣ ، ٣) } د) { (-٣ ، -٣) ، (٣ ، ٣) }

الحل : من المعادلة الأولى: س = ص بالتعويض في الثانية $ص^2$ = ٩ ∴ ص = ± ٣ بالتعويض في س = ص
عندما ص = -٣ ∴ س = -٣ ، عندما ص = ٣ ∴ س = ٣ ∴ م.ح = { (-٣ ، -٣) ، (٣ ، ٣) }

٨ أحد حلول المعادلتين س ـ ص = ٢ ، $س^2 + ص^2$ = ٢٠ هو ....

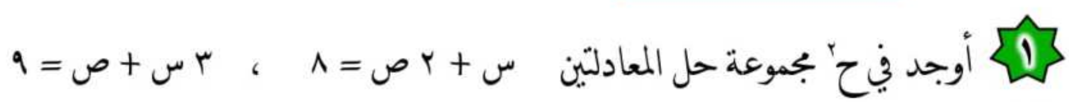
أ) { (-٤ ، ٢) } ب) { (٢ ، -٤) } جـ) { (٣ ، ١) } د) { (٤ ، ٢) }

٩ إذا كان المستقيمان س + ٣ص = ٤ ، س + أ ص = ٧ متوازيين فإن أ = ...

أ) ٢ ب) ٣ جـ) ٤ د) ٧

الواجب المنزلى

الدرس الأول : حل معادلتين من الدرجة الأولى



١- أوجد في ح^{٢} مجموعة حل المعادلتين   س + ٢ ص = ٨   ،   ٣ س + ص = ٩

٢- أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين   ٢س + ص = ١   ،   س + ٢ص = ٥

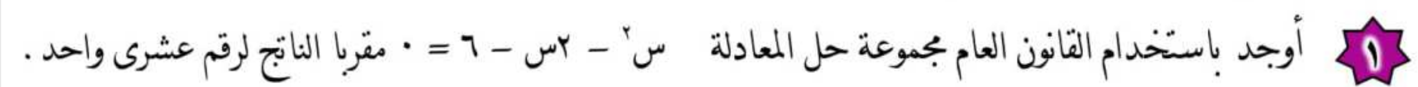
٣- أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين   س = ص + ٤   ،   ٣ س + ٢ص = ٧

٤- مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم فإذا كان محيطه ٢٢ سم فأوجد مساحته.

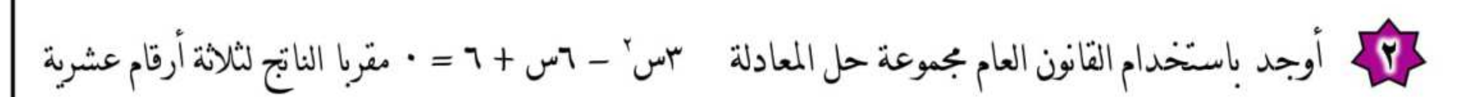
٥- أوجد بيانيا مجموعة حل المعادلتين   ص = ٢س – ٣   ،   س + ٢ص = ٤



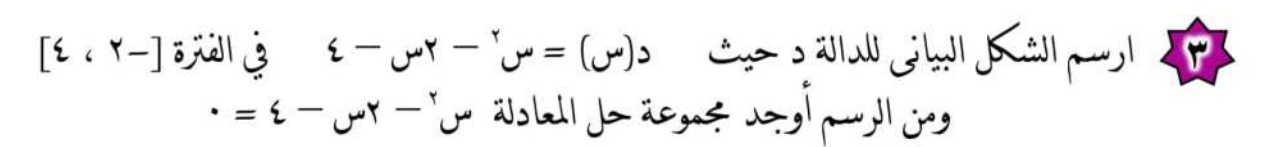
الدرس الثانى : القانون العام



١- أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة   س^{٢} – ٢س – ٦ = ٠ مقربا الناتج لرقم عشرى واحد .

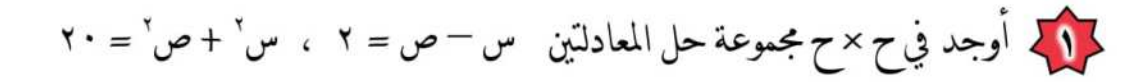


٢- أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة   ٣س^{٢} – ٦س + ٦ = ٠ مقربا الناتج لثلاثة أرقام عشرية



٣- ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث   د(س) = س^{٢} – ٢س – ٤   في الفترة [–٢ ، ٤]
ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س^{٢} – ٢س – ٤ = ٠

الدرس الثالث : حل معادلتين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الثانية



١- أوجد في ح ×ح مجموعة حل المعادلتين   س – ص = ٢ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠



٢- أوجد في ح ×ح مجموعة حل المعادلتين   س + ٢ص = ٤ ، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٧

٣- عددان مجموعهما ٩٠ وحاصل ضربهما ٢٠٠٠ أوجد العددين

٤- مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ومساحته ٢٨ سم^{٢} أوجد محيطه.

٥- مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم ، محيطه يساوى ٣٠ سم   أوجد طولى ضلعى القائمة



أصفار الدالة



- ✵ لإيجاد أصفار الدالة نساوى الدالة بالصفر ونحل المعادلة

مثال: إذا كانت د (س) = $س^٢$ – ٩ فأوجد أصفار الدالة

الحل: $س^٢$ – ٩ = ٠ ∴ $س^٢$ = ٩ ∴ س = ±٣ ∴ ص(د)= { -٣ ، ٣ }

- ✵ لو كانت د (س) = صفر فإن ص (د) = ح
- ✵ أصفار الكسر الجبرى = أصفار البسط – أصفار المقام

(يعنى اللى موجود في أصفار البسط ومش متكرر في أصفار المقام)

الدوال التي أصفارها = Φ

- ✵ ($س^٢$ + عفريت) ملوش أصفار: زى $س^٢$ + ٤ أو $س^٢$+ ٣ وهكذا ص(د) = Φ
- ✵ في مجموع المكعبين والفرق بينهما : القوس الكبير ملوش أصفار ص(د) = Φ
- ✵ لو كانت د(س) = أي عدد (ما عدا الصفر) زى د(س) = ٣ فإن ص(د) = Φ

تحصيل محمود عوض
معلم اول رياضيات

تدريب: أوجد مجموعة أصفار كل من الدوال الآتية:

① د (س) = ٢$س^٣$ – ١٨س

الحل : ....

....

ص (د) = ...

② د (س) = $س^٢$ + ٢س – ١٥

الحل : ....

....

ص (د) = ...

③ د (س) = ٢$س^٣$ + ١٦

الحل : ....

....

ص (د) = ...

ملحوظة : لو أعطاك أصفار الدالة معلومة في المسألة عوّض بيها في الدالة وساوى الدالة بالصفر

مثال ١

إذا كانت { -٣ ، ٣ } هي مجموعة أصفار الدالة د حيث د(س) = $س^٢$ + أ فأوجد قيمة أ

الحل

∵ { -٣ ، ٣ } هي مجموعة أصفار الدالة

∴ أي قيمة من هذه القيم تجعل د (س) = ٠

∴ $٣^٢$ + أ = ٠

٩ + أ = ٠ ∴ أ = -٩

مثال ٢

إذا كانت د(س) = $س^٣$ - ٢$س^٢$ - ٧٥

فاثبت أن العدد ٥ أحد أصفار هذه الدالة

الحل

بالتعويض في الدالة عن س = ٥

∴ د (٥) = $٥^٣$ – ٢ × $٥^٢$ – ٧٥

= ١٢٥ – ٥٠ – ٧٥

= ٠

∵ د (٥) = ٠ ∴ العدد ٥ أحد أصفار الدالة



انت أقوى من المجال

مجال الكسر الجبرى

<u>دالة الكسر الجبرى</u> : يرمز لها بالرمز ن(س) أو ق(س) أو د(س) وهي دالة على صورة ن (س) = $\frac{د(س)}{ق(س)}$

مثل : ن (س) = $\frac{س + ٥}{٣}$ ، ن (س) = $\frac{٢س}{٢س +٨}$ ، د (س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٧س + ١٢}$

- **مجال الكسر الجبرى = ح – أصفار المقام**

مثال : إذا كان ن (س) = $\frac{س - ١}{س - ٣}$ فإن مجال ن = ح - { ٣ }

- **المجال المشترك لعدة كسور جبرية = ح – مجموعة أصفار المقامات**

<u>مثال</u>: إذا كان $ن_١$(س) = $\frac{١}{س - ١}$ ، $ن_٢$(س) = $\frac{س +٣}{(س -٥)(س +٧)}$

فإن المجال المشترك لكل من $ن_١$ ، $ن_٢$ = ح - { ١ ، ٥ ، -٧ }

- **ملحوظة : قبل إخراج المجال حلل المقام لو ليه تحليل .**

تدريب ١ : عيّن مجال كل من الدوال الكسرية الآتية :

① ن (س) = $\frac{س + ٥}{٣}$

الحل المقام عدد يبقى ملوش أصفار

المجال = ح

② ن (س) = $\frac{س - ٢}{٢س}$

الحل ....

③ ن (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ + س - ٢}$

الحل ....

④ ن (س) = $\frac{س + ١}{س^٤ - س}$

الحل ....

⑤ ن (س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٤}$

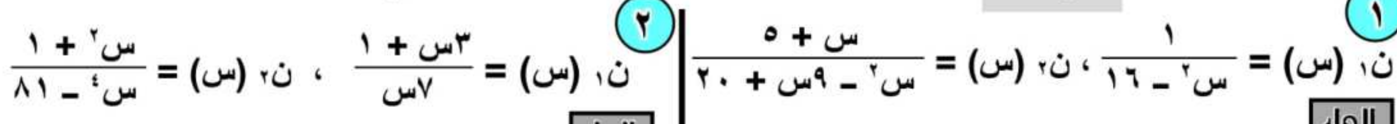
الحل ....



⑥ ن (س) = $\frac{س + ١}{٤س^٣ - ٩ س}$

الحل ....

تدريب ٢ : عيّن المجال المشترك لكل من الدوال الكسرية الآتية :



① $ن_١$ (س) = $\frac{١}{س^٢ - ١٦}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{س + ٥}{س^٢ - ٩س + ٢٠}$

الحل ....

② $ن_١$ (س) = $\frac{٣س + ١}{٧س}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{س^٢ + ١}{س^٤ - ٨١}$

الحل ....

أمثلة وتدريبات على الأصفار والمجال

١ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د(س) = أ س^{٢} + ب س + ١٥ هي {٣ ، ٥} فأوجد قيمة كل من أ ، ب

الحل

∵ د(٣) = ٠ ∴ ٩ أ + ٣ ب + ١٥ = ٠ بالقسمة ÷ ٣

٣ أ + ب = −٥ ⟵ ١

∵ د(٥) = ٠ ∴ ٢٥ أ + ٥ ب + ١٥ = ٠ بالقسمة ÷ ٥

٥ أ + ب = −٣ ⟵ ٢

بحل المعادلتين بطريقة الحذف

٣ أ + ب = −٥

٥ أ + ب = −٣ بالطرح

−٢ أ = −٢ ∴ أ = ١

بالتعويض في ١ ∴ ٣ + ب = −٥ ∴ ب = −٨

٢ إذا كان مجال الدالة ن(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} - \text{أ س} + ٩}$ هو ح − {٣} فأوجد قيمة أ

الحل

∵ المجال = ح − {٣}

∴ أصفار المقام = ٣

بالتعويض عن س = ٣ ونساوى المقام بالصفر

∴ ٣^{٢} − أ × ٣ + ٩ = ٠

٩ − ٣ أ + ٩ = ٠

١٨ − ٣ أ = ٠

٣ أ = ١٨

∴ أ = ٦

٣ إذا كانت {٥ ، −٣} هي مجموعة أصفار الدالة د(س) = س^{٢} − ٢ س + أ فأوجد قيمة أ

الحل

....

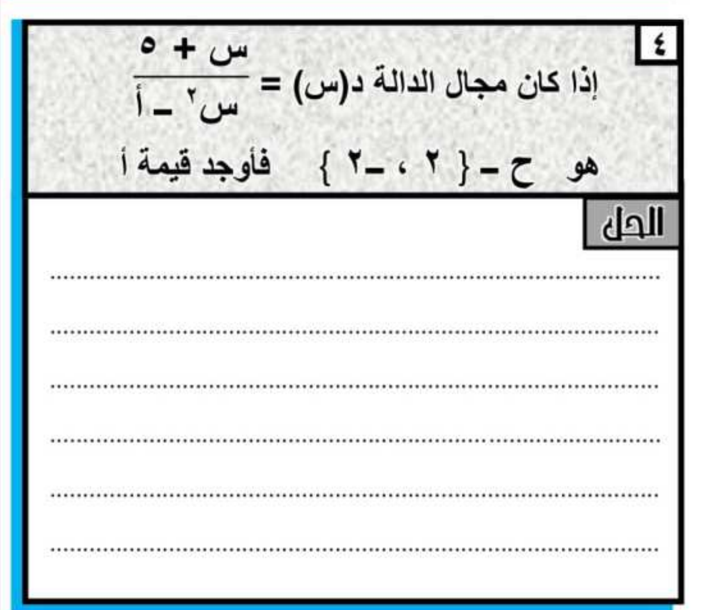
....

....

....

....

....



٤ إذا كان مجال الدالة د(س) = $\frac{\text{س} + ٥}{\text{س}^{٢} - \text{أ}}$ هو ح − {٢ ، −٢} فأوجد قيمة أ

الحل

....

....

....

....

....

....

٥ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة ن(س) = $\frac{\text{س} - \text{أ}}{\text{س} + \text{ب}}$ هى {٥} ، و مجالها هو ح − {٣} فأوجد قيمتى كل من أ ، ب

الحل

∵ أصفار الكسر الجبرى = {٥}

∴ أصفار البسط = {٥}

٥ − أ = ٠ ∴ أ = ٥

∵ المجال = ح − {٣} ∴ أصفار المقام = {٣}

٣ + ب = ٠ ∴ ب = −٣

٦ إذا كان مجال الدالة ن(س) = $\frac{\text{ب}}{\text{س}} + \frac{٩}{\text{س} + \text{أ}}$ هو ح − {٠ ، ٤} ، ن(٥) = ٢ فأوجد قيمتى أ ، ب

∵ المجال = ح − {٠ ، ٤} ∴ أصفار المقام الثانى = ٤

٤ + أ = ٠ ∴ أ = −٤

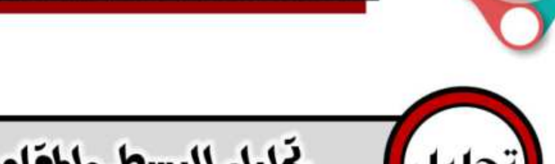
∴ ن(س) = $\frac{\text{ب}}{\text{س}} + \frac{٩}{\text{س} - ٤}$

∵ ن(٥) = ٢ ∴ $\frac{\text{ب}}{٥} + \frac{٩}{٥ - ٤} = ٢$

$\frac{\text{ب}}{٥}$ + ٩ = ٢ ∴ $\frac{\text{ب}}{٥}$ = −٧ ∴ ب = −٣٥

اختزال الكسر الجبرى

تصميم محمود عوض
معلم أول رياضيات



خطوات اختزال الكسر الجبرى

- **تحليل**: تحليل البسط والمقام
- **مجال**: إخراج المجال = ح ـ أصفار المقام
- **حذف**: حذف العوامل المتشابهة بين البسط والمقام





مثال

اختصر لأبسط صورة $ن(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ٤س - ٥}$

الحل

التحليل : $ن(س) = \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)(س + ٥)}$

المجال : المجال = ح - { ١ ، -٥ }

الحذف : $ن(س) = \frac{س + ١}{س + ٥}$

تدريب ١

اختصر لأبسط صورة $ن(س) = \frac{س^٣ - ١}{س^٣ + س^٢ + س}$

الحل

التحليل :..

المجال :..

الحذف :..

تدريب ٢

اختصر لأبسط صورة $ن(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٣ - ٨}$

الحل

....
....
....
....
....
....
....

تدريب ٣

اختصر لأبسط صورة $ن(س) = \frac{س^٢ - ٦س + ٩}{٢س^٢ - ١٨س}$

الحل

....
....
....
....
....
....
....



تساوى كسرين جبريين

إعداد / محمود عوض حسن

لو عايز تعرف هل : $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$ أم لا اتبع الآتى :

- اختصر كل كسر لوحده بالخطوات الثلاثة **(تحليل – مجال – حذف)**
- $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$ إذا تحقق شرطان معًا وهما : ❶ مجال ن_1 = مجال ن_2 ❷ $\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$ بعد الاختصار النهائي
- لو لقيت **مجال ن_1 = مجال ن_2** بينما $\text{ن}_1(\text{س}) \neq \text{ن}_2(\text{س})$ فإن $\text{ن}_1 \neq \text{ن}_2$
- لو لقيت $\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$ بينما **مجال $\text{ن}_1 \neq$ مجال ن_2** فإن: $\text{ن}_1 \neq \text{ن}_2$

ولكن في حالة اختلاف المجالين يكون $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$ في المجال المشترك فقط

مثال ١

إذا كان $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^2}{\text{س}^3 - \text{س}^2}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^3 + \text{س}^2 + \text{س}}{\text{س}^4 - \text{س}}$ اثبت أن: $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$

الحل

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^2}{\text{س}^3 - \text{س}^2} = \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2(\text{س} - 1)}$$

مجال ن_1 = ح − {٠ ، ١}

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{1}{\text{س} - 1}$$

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^3 + \text{س}^2 + \text{س}}{\text{س}^4 - \text{س}} = \frac{\text{س}(\text{س}^2 + \text{س} + 1)}{\text{س}(\text{س}^3 - 1)}$$

$$= \frac{\text{س}(\text{س}^2 + \text{س} + 1)}{\text{س}(\text{س} - 1)(\text{س}^2 + \text{س} + 1)}$$

مجال ن_2 = ح − {٠ ، ١}

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{1}{\text{س} - 1}$$

∵ $\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$ ، مجال ن_1 = مجال ن_2

∴ $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$

مثال ٢

أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه ن_1 ، ن_2 حيث: $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + \text{س} + 12}{\text{س}^2 + 5\text{س} + 4}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - 2\text{س} - 3}{\text{س}^2 + 2\text{س} + 1}$

الحل

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + \text{س} + 12}{\text{س}^2 + 5\text{س} + 4} = \frac{(\text{س} + 4)(\text{س} - 3)}{(\text{س} + 4)(\text{س} + 1)}$$

مجال ن_1 = ح − {−٤ ، −١}

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س} - 3}{\text{س} + 1}$$

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - 2\text{س} - 3}{\text{س}^2 + 2\text{س} + 1} = \frac{(\text{س} - 3)(\text{س} + 1)}{(\text{س} + 1)(\text{س} + 1)}$$

مجال ن_2 = ح − {−١}

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س} - 3}{\text{س} + 1}$$

∵ $\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$ بينما مجال $\text{ن}_1 \neq$ مجال ن_2

∴ $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$ في المجال المشترك ح − {−٤ ، −١}

١ إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{٢س}{٢س + ٨}$ ،

$ن_{٢}(س) = \frac{س^{٢} + ٤س}{س^{٢} + ٨س + ١٦}$ اثبت أن : $ن_{١} = ن_{٢}$

الحل

....

٢ إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{٢س^{٣} + ٦س}{(س - ١)(س^{٢} + ٣)}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{٢س}{س - ١}$

بيِّن إذا كان $ن_{١} = ن_{٢}$ أم لا ؟ مع ذكر السبب

الحل

....

٣ أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتان:

$ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} + ٩س + ٢٠}{س^{٢} - ١٦}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{س + ٥}{س^{٢} - ٤س}$

الحل

....

٤ إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + س - ٦}$ ،

$ن_{٢}(س) = \frac{س^{٣} - س^{٢} - ٦س}{س^{٣} - ٩س}$ اثبت أن: $ن_{١}(س) = ن_{٢}(س)$

لجميع قيم س التي تنتمى إلى المجال المشترك ، وأوجد هذا المجال

الحل

$ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + س - ٦} = \frac{(س + ٢)(س - ٢)}{(س + ٣)(س - ٢)}$

$ن_{١}(س) = \frac{س + ٢}{س + ٣}$ مجال $ن_{١} = ح - \{-٣ ، ٢\}$

$ن_{٢}(س) = \frac{س^{٣} - س^{٢} - ٦س}{س^{٣} - ٩س} = \frac{س(س^{٢} - س - ٦)}{س(س^{٢} - ٩)}$

$= \frac{س(س - ٣)(س + ٢)}{س(س - ٣)(س + ٣)}$

$ن_{٢}(س) = \frac{س + ٢}{س + ٣}$ مجال $ن_{٢} = ح - \{-٣ ، ٠ ، ٣\}$

∵ $ن_{١}(س) = ن_{٢}(س)$ بينما مجال $ن_{١} \neq$ مجال $ن_{٢}$

∴ $ن_{١}(س) = ن_{٢}(س)$ فقط في المجال المشترك

$ح - \{-٣، ٢، ٠، ٣\}$

٥ جمع وطرح الكسور الجبرية

إعداد/ محمود عوض

الخطوات :

١ ترتيب حدود المقادير (يعنى ١٥ – ١٣ س + ٢س^٢^ رتبه بإشاراته وخليه كده ٢س^٢^ – ١٣س + ١٥)

٢ تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن

٣ إخراج المجال المشترك (ح – أصفار المقامات)

٤ حذف العوامل المتشابهة في كل كسر لوحده (إوعى تحذف قوس من الكسر الأول مع قوس من الكسر التانى)

٥ لو لقيت المقامات موحدة : خد مقام منهم وإجمع البسطين أو اطرحهم (حسب العملية) .

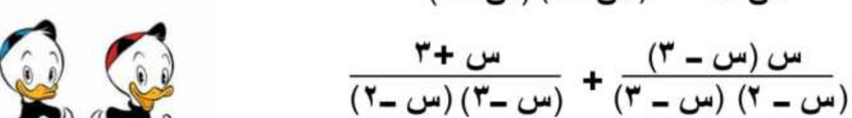
زى كده : $\frac{س}{س + ٢} + \frac{٣}{س + ٢} = \frac{س + ٣}{س + ٢}$

لو المقامات غير موحدة : وحد المقامات كالتالى :

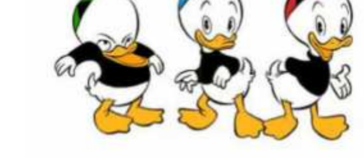
شوف إيه اللى موجود في مقام الأول ومش موجود في مقام التانى واضربه × الكسر التانى كله (بسط ومقام)

وشوف إيه اللى موجود في مقام التانى ومش موجود في مقام الأول واضربه × الكسر التانى كله (بسط ومقام)

زى كده : $\frac{س}{س – ٢} + \frac{س +٣}{(س –٣)(س –٢)}$ هنضرب بسط ومقام الأول × (س – ٣)



هيبقى كده : $\frac{س (س – ٣)}{(س – ٢)(س – ٣)} + \frac{س +٣}{(س –٣)(س –٢)}$



أو كده : $\frac{س}{س +١} + \frac{١}{س –١}$ هنضرب بسط ومقام الأول × (س – ١) وهنضرب بسط ومقام التانى × (س +١)

هيبقى كده : $\frac{س (س – ١)}{(س +١)(س – ١)} + \frac{س + ١}{(س –١)(س + ١)}$

٦ اجمع المتشابه في البسط ولو نفع يتحلل حلله و ضع المقدار في أبسط صورة

فمثلا : $\frac{س^٢ – ٣س + س +٣}{(س – ٢)(س – ٣)} = \frac{س^٢ – ٢س +٣}{(س – ٢)(س – ٣)} = \frac{(س – ٣)(س + ١)}{(س – ٢)(س – ٣)} = \frac{س + ١}{س – ٢}$

ملحوظة هامة

لو لقيت مقدار فيه حدين مطروحين ومش مرتب

زى كده ٣ – س هنخليه كده – (س – ٣)

أو كده ١ – س^٢^ هنخليه كده – (س^٢^ –١)

تصميم محمود عوض
معلم اول رياضيات

أمثلة محلولة

١

أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢} - \frac{٤}{\text{س}^٢ - ٤\text{س}}$$

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٣}{(\text{س} - ٤)(\text{س} - ٣)} - \frac{٤}{\text{س}(\text{س} - ٤)}$$

المجال = ح − { ٤ ، ٣ ، ٠ }

$$\text{ن(س)} = \frac{١}{\text{س} - ٤} - \frac{٤}{\text{س}(\text{س} - ٤)}$$

نوحد المقامات : نضرب الكسر الأول × س

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}}{\text{س}(\text{س} - ٤)} - \frac{٤}{\text{س}(\text{س} - ٤)}$$

خد منهم مقام واطرح البسطين

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٤}{\text{س}(\text{س} - ٤)} = \frac{١}{\text{س}}$$

٢

أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\text{س}^٢ - ٤} + \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$$

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}(\text{س} + ٢)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)} + \frac{\text{س} + ٣}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٢)}$$

المجال = ح − { ٢ ، −٢ ، ٣ }

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢} + \frac{\text{س} + ٣}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٢)}$$

نوحد المقامات : نضرب الكسر الأول × (س −٣)

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)} + \frac{\text{س} + ٣}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٢)}$$

اضرب س × القوس واجمع البسطين

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + \text{س} + ٣}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)} = \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٣}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}$$

تصميم محمود عوض
معلم اول رياضيات

٣

أوجد الدالة ن في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ١٢}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤} + \frac{\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ٥}{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٠}$$

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٦)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٢)} + \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٥)(\text{س} - ٢)}$$

المجال = ح − { ٢ ، ٥ }

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٦}{\text{س} - ٢} + \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢}$$

$$= \frac{\text{س} - ٦ + \text{س} + ١}{\text{س} - ٢}$$

اجمع الحدود المتشابهة اللى في البسط

$$\text{ن(س)} = \frac{٢\text{س} - ٥}{\text{س} - ٢}$$

٤

أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢}{\text{س} - ١} + \frac{\text{س}}{١ - \text{س}}$$

الحل

١ − س هنخليه −(س − ١)

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢}{\text{س} - ١} + \frac{\text{س}}{-(\text{س} - ١)}$$

هنضرب السالب اللى قدام القوس × الـ + بتاعت الجمع

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢}{\text{س} - ١} - \frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$$

خد بالك ان العملية اتحولت طرح

المجال = ح − { ١ }

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} - ١} = \frac{\text{س}(\text{س} - ١)}{\text{س} - ١} = \text{س}$$

تدريبات

١ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث:

$$ن(س) = \frac{س}{س^٢ + ٢س} + \frac{س + ٢}{س^٢ - ٤}$$

الحل

٢ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال :

$$ن(س) = \frac{س^٢ - س}{س^٢ - ١} + \frac{س - ٥}{س^٢ - ٦س + ٥}$$

الحل

٣ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال:

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س^٣ - ٨} - \frac{٩ - س^٢}{س^٢ + س - ٦}$$

الحل

٤ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال:

$$ن(س) = \frac{س}{س - ٤} - \frac{س + ٤}{س^٢ - ١٦}$$

الحل





١ تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن (متنساش العامل المشترك)

٢ إخراج المجال المشترك (ح – أصفار المقامين)

٣ حذف العوامل المشتركة بين أي بسط وأى مقام

يعنى تقدر تحذف قوس من بسط الأول مع اللى شبهه في مقام التانى وهكذا و ده بينفع في الضرب ومش بينفع في الجمع

٤ ضرب البسط × البسط　　والمقام × المقام

مثال:

أوجد ن (س) في أبسط صورة حيث

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} \times \frac{س + ١}{س^٢ - ١}$$

الحل:

$$ن(س) = \frac{(س + ٣)(س - ١)}{س + ٣} \times \frac{س + ١}{(س + ١)(س - ١)}$$

المجال = ح - { -٣ ، -١ ، ١ }　،　ن (س) = ١



✱ كل اللى هتعمله انك تحوّل القسمة إلى ضرب كالتالى :

الـ ÷ خليها × ⬅ وشقلب الكسر التانى ⬅ وحل بخطوات الضرب عادى

✱ ملحوظة : فيه اختلاف صغير في مسائل القسمة لما تكتب المجال وهو :

المجال في القسمة = ح – أصفار المقامين وأصفار بسط الثانى

مثال:

أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث :

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} \div \frac{س^٢ - ١}{س + ٥}$$

الحل:

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} \times \frac{س + ٥}{س^٢ - ١}$$

$$= \frac{(س + ٣)(س - ١)}{س + ٣} \times \frac{(س + ٥)}{(س + ١)(س - ١)}$$

المجال = ح - { -٣ ، -١ ، ١ ، -٥ }

$$ن(س) = \frac{س + ٥}{س + ١}$$

أمثلة محلولة

١ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ + س - ٦} \times \frac{س + ٣}{س^٢ + ٢س + ٤}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س + ٣)} \times \frac{س + ٣}{س^٢ + ٢س + ٤}$$

المجال = ح - { ٢ ، -٣ }

$$ن(س) = ١$$

٢ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^٣ - ١}{س^٢ - س} \times \frac{س + ٣}{س^٢ + س + ١}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}{س(س - ١)} \times \frac{س + ٣}{س^٢ + س + ١}$$

المجال = ح - { ٠ ، ١ }

$$ن(س) = \frac{س + ٣}{س}$$

٣ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٩} \div \frac{٢س}{س + ٣}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٩} \times \frac{س + ٣}{٢س}$$

$$ن(س) = \frac{س(س + ٢)}{(س + ٣)(س - ٣)} \times \frac{س + ٣}{٢س}$$

المجال = ح - { -٣ ، ٣ ، ٠ }

$$ن(س) = \frac{س + ٢}{٢(س - ٣)}$$

تصميم محمود عوض
معلم أول رياضيات



تصميم محمود عوض
معلم أول رياضيات

٤ إذا كانت

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٩}{٢س^٢ + ٣س} \div \frac{٣س^٢ + ٦س - ٤٥}{٤س^٢ - ٩}$$

فأوجد ن(س) في أبسط صورة موضحًا المجال

الحل

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٩}{٢س^٢ + ٣س} \times \frac{٤س^٢ - ٩}{٣س^٢ + ٦س - ٤٥}$$

$$ن(س) = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س(٢س + ٣)} \times \frac{(٢س - ٣)(٢س + ٣)}{٣(س^٢ + ٢س - ١٥)}$$

$$= \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س(٢س + ٣)} \times \frac{(٢س - ٣)(٢س + ٣)}{٣(س + ٥)(س - ٣)}$$

المجال = ح - { ٠ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، -٥ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ }

$$ن(س) = \frac{(س + ٣)(٢س - ٣)}{٣س(س + ٥)}$$

٥ أوجد:

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٤س + ٣}{س^٣ - ٢٧} \div \frac{س + ٣}{س^٢ + ٣س + ٩}$$

ثم أوجد ن(٢) ، ن(-٣) إن أمكن

الحل

$$ن(س) = \frac{(س + ٣)(س + ١)}{(س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)} \times \frac{س^٢ + ٣س + ٩}{س + ٣}$$

المجال = ح - { ٣ ، -٣ }

$$ن(س) = \frac{س + ١}{س - ٣}$$

$$ن(٢) = \frac{٢ + ١}{٢ - ٣} = -٣$$

ن(-٣) غير ممكنة لأن $-٣ \notin$ للمجال

٦ أوجد ن(س) وعين مجالها حيث:

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}+1}{\text{س}^2-\text{س}-2} \times \frac{\text{س}^2+3\text{س}-10}{3\text{س}^2+16\text{س}+5}$$

ثم أوجد ن (٠) ، ن (−١) إن أمكن

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}+1}{(\text{س}-2)(\text{س}+1)} \times \frac{(\text{س}+5)(\text{س}-2)}{(\text{س}+5)(3\text{س}+1)}$$

المجال = ح − { ٢ ، −١ ، −٥ ، $\frac{-1}{3}$ }

$$\text{ن (س)} = \frac{1}{3\text{س}+1}$$

$$\text{ن (٠)} = \frac{1}{3\times 0+1} = 1$$

ن (−١) غير ممكنة لأن −١ ∉ للمجال

٧ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^2-2\text{س}-15}{\text{س}^2-9} \div \frac{2\text{س}-10}{\text{س}^2-6\text{س}+9}$$

الحل

متنساش: الـ ÷ هنخليها × وهنشقلب الكسر التانى

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^2-2\text{س}-15}{\text{س}^2-9} \times \frac{\text{س}^2-6\text{س}+9}{2\text{س}-10}$$

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س}-5)(\text{س}+3)}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)} \times \frac{(\text{س}-3)(\text{س}-3)}{2(\text{س}-5)}$$

المجال = ح − { ٣ ، −٣ ، ٥ }

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}-3}{2}$$



تصميم محمود عوض
معلم اول رياضيات

٨ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\text{ن (س)} = \frac{\text{س}^2-12\text{س}+36}{\text{س}^2-6\text{س}} \times \frac{4\text{س}+24}{36-\text{س}^2}$$

الحل

عارف هنعمل إيه في المقدار ٣٦ − س² !!

هنخليه كده − (س² − ٣٦)

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س}-6)(\text{س}-6)}{\text{س}(\text{س}-6)} \times \frac{4(\text{س}+6)}{-(\text{س}-6)(\text{س}+6)}$$

المجال = ح − { ٠ ، ٦ ، −٦ }

$$\text{ن (س)} = \frac{-4}{\text{س}}$$

٩ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث :

$$\text{ن (س)} = \frac{\text{س}^2-3\text{س}+2}{1-\text{س}^2} \div \frac{3\text{س}-15}{\text{س}^2-6\text{س}+5}$$

الحل

١ − س² هنخليه − (س² − ١) ونحول الضرب لقسمة

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^2-3\text{س}+2}{-(\text{س}^2-1)} \times \frac{\text{س}^2-6\text{س}+5}{3\text{س}-15}$$

$$= \frac{(\text{س}-2)(\text{س}-1)}{-(\text{س}-1)(\text{س}+1)} \times \frac{(\text{س}-5)(\text{س}-1)}{3(\text{س}-5)}$$

المجال = ح − { ١ ، −١ ، ٥ }

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س}-2)(\text{س}-1)}{-3(\text{س}+1)}$$

تصميم محمود عوض
معلم اول رياضيات

إعداد / محمود عوض حسن



تدريبات

١ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^{٢} + س + ١}{س} \times \frac{س^{٢} - س}{س^{٣} - ١}$$

الحل

....

٢ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث:

$$ن(س) = \frac{٣س - ١٥}{س + ٣} \times \frac{٤س + ١٢}{٥س - ٢٥}$$

الحل

....

٣ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث :

$$ن(س) = \frac{س^{٢} - ٣س}{٢س^{٢} - س - ٦} \div \frac{٢س^{٢} - ٣س}{٤س^{٢} - ٩}$$

الحل

....

٤ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^{٢} + ٢س}{س^{٣} - ٢٧} \div \frac{س + ٢}{س^{٢} + ٣س + ٩}$$

ثم أوجد ن (٢) ، ن (−٢) إن أمكن

الحل

....

المعكوس الضربى للكسر الجبرى

٧ مدرسة مصر الخير

◆ إذا رمزنا للكسر الجبرى بالرمز ن (س) فإن معكوسه الضربى يرمز له بالرمز $\text{ن}^{-1}(\text{س})$

◆ إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ٣}$ فإن $\text{ن}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ١}$ (شقلب الكسر يجيلك معكوسه)

◆ مجال ن^{-1} = ح – أصفار البسط و المقام   من المثال اللى فات: مجال $\text{ن}^{-1}(\text{س})$ = ح – { −٣ ، ١ }

مثال ١

إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}$

أوجد $\text{ن}^{-1}(\text{س})$ في أبسط صورة مبينًا مجال $\text{ن}^{-1}(\text{س})$

الحل

$\text{ن}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٩}$ *شقلبنا الكسر*

$= \frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٣)}$ *حللنا*

المجال = ح – { −٣ ، ٣ ، ٢ }

$\text{ن}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٣}$ *اختصرنا*

تدريب ١

إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + ٣\text{س}}{\text{س}^٣ + ٢٧}$

أوجد $\text{ن}^{-1}(\text{س})$ في أبسط صورة مبينًا مجال $\text{ن}^{-1}(\text{س})$

الحل

....
....
....
....
....
....
....

مثال ٢

إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س}}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}$

فأوجد: (١) **$\text{ن}^{-1}(\text{س})$** مبينا مجالها

(٢) **قيمة** س **إذا كان** **$\text{ن}^{-1}(\text{س}) = ٣$**

الحل

$\text{ن}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}{\text{س}^٢ - ٢\text{س}} = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}{\text{س}(\text{س} - ٢)}$

مجال ن^{-1} = ح – { ٠ ، ٢ ، ١ }

$\text{ن}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ١}{\text{س}}$

∵ $\text{ن}^{-1}(\text{س}) = ٣$ ∴ $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}} = ٣$ (مقص)

∴ $\text{س} - ١ = ٣\text{س}$ $٢\text{س} = -١$ $\text{س} = \frac{-١}{٢}$

تدريب ٢

إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}{(\text{س} - ٣)(\text{س}^٢ + ٢)}$

فأوجد: (١) **$\text{ن}^{-1}(\text{س})$** مبينا مجالها

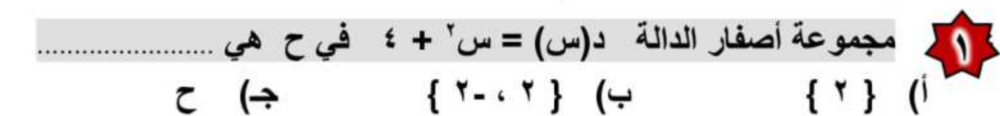
(٢) **قيمة** س **إذا كان** **$\text{ن}^{-1}(\text{س}) = ٣$**

الحل

....
....
....
....
....
....
....
....
....

أسئلة اختر على الوحدة الثانية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^{٢} + ٤$ في ح هي ....

أ) { ٢ }　　ب) { ٢ ، -٢ }　　ج) ح　　د) Φ

(٢) مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = -٣س هى ....

أ) { ٠ }　　ب) { -٣ }　　ج) { (-٣ ، ٠) }　　د) ح

(٣) مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = س ($س^{٢}$ -٢س +١) هى ....

أ) { ٠ ، ١ }　　ب) { ٠ ، -١ }　　ج) { (-١ ، ٠) }　　د) { ١ }

الحل: ....

(٤) إذا كانت ص(د) = { ٢ } ، د(س) = $س^{٣}$ - م　فإن م = ...

أ) $\sqrt[٣]{٢}$　　ب) ٢　　ج) ٤　　د) ٨

الحل: ....

(٥) إذا كانت ص(د) = { ٥ } ، د(س) = $س^{٣}$ - $٣س^{٢}$ + أ　فإن أ = ...

أ) -٥٠　　ب) -٥　　ج) ٥　　د) ٥٠

الحل: ....

(٦) مجال الدالة ن (س) = $\frac{س}{س - ١}$ هو ....

أ) ح - { صفر }　　ب) ح - { ١ }　　ج) ح - { صفر ، ١ }　　د) ح - { -١ }

(٧) إذا كان ن١(س) = $\frac{-٧}{س + ٢}$ ، ن٢(س) = $\frac{س}{س - ك}$ وكان المجال المشترك هو ح - {-٢ ، ٧} فإن ك = ...

أ) ٢　　ب) ٧　　ج) -٢　　د) -٧

(٨) إذا كانت ن١(س) = $\frac{١ + أ}{س - ٢}$ ، ن٢(س) = $\frac{٤}{س - ٢}$ وكان ن١(س) = ن٢(س) فإن أ = ...

أ) ١　　ب) ٢　　ج) ٣　　د) ٤

(٩) إذا كانت س ≠ صفر　فإن $\frac{٥س}{س^{٢} + ١} \div \frac{س}{س^{٢} + ١}$ = ...

أ) - ٥　　ب) - ١　　ج) ١　　د) ٥

(١٠) مجال المعكوس الضربى للدالة د(س) = $\frac{س + ٢}{س - ٣}$ هو ....

أ) { ٣ }　　ب) ح - { -٢ ، ٣ }　　ج) ح - { ٣ }　　د) ح

(١١) إذا كان للكسر الجبرى $\frac{س - أ}{س + ٥}$ معكوس ضربى وهو $\frac{س + ٥}{س + ٣}$ فإن أ = ...

أ) ٣　　ب) -٥　　ج) -٣　　د) ٥

الواجب المنزلى

إعداد / محمود عوض حسن

الأصفار والمجال

١) إذا كانت { ـ ٢ ، ٢ } هي مجموعة أصفار الدالة $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 + \text{م}$ فأوجد قيمة م

٢) أوجد المجال المشترك لكل من : $\text{ن}_1(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - 4}{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \dfrac{3\text{س}}{\text{س}^2 - \text{س}}$

٣) إذا كان مجال الدالة د حيث $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + 1}{\text{س}^2 + \text{أ}\,\text{س} + 4}$ هو ح ـ { ٢ } فأوجد قيمة أ

تساوى كسرين جبريين

٤) إذا كانت: $\text{ن}_1(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - 4}{\text{س}^2 + \text{س} - 6}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - \text{س} - 6}{\text{س}^2 - 9}$ بين ما إذا كانت $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$ أم لا مع ذكر السبب

٥) إذا كانت : $\text{ن}_1(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2}{\text{س}^3 - 3\text{س}^2}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س}^2 - 3\text{س}}$ فاثبت أن $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$

٦) أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتان : $\text{ن}_1(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + 1}{\text{س} - 2}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 + \text{س}}{\text{س}^2 - 2\text{س}}$

جمع وطرح الكسور الجبرية

٧) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث: $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{3\text{س} - 4}{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6} - \dfrac{2\text{س} + 6}{\text{س}^2 + \text{س} - 6}$

٨) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث: $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - 3}{\text{س}^2 - 7\text{س} + 12} - \dfrac{\text{س} - 3}{3 - \text{س}}$

٩) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث: $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - \text{س}}{\text{س}^2 - 1} + \dfrac{\text{س} - 5}{\text{س}^2 - 6\text{س} + 5}$

ضرب وقسمة الكسور الجبرية

١٠) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث: $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - 2\text{س} + 1}{\text{س}^3 - 1} \div \dfrac{2\text{س} - 2}{\text{س}^2 + \text{س} + 1}$

١١) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث: $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}{\text{س} + 3} \div \dfrac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} + 1}$

١٢) إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - 49}{\text{س}^3 - 8} \times \dfrac{\text{س} - 2}{\text{س} + 7}$ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها ثم احسب قيمة ن (١)

المعكوس الضربى للكسر الجبرى

١٣) إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - 2}{\text{س} + 1}$ فأوجد : ١) $\text{ن}^{-1}(\text{س})$ مبينًا مجالها ٢) $\text{ن}^{-1}(3)$

١٤) إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - 4\text{س} - 5}{\text{س}^2 - 25}$ فأوجد : ١) $\text{ن}^{-1}(\text{س})$ مبينًا مجالها ٢) $\text{ن}^{-1}(5)$

تصميم محمود عوض
معلم اول رياضيات



إعداد/ محمود عوض حسن

الاحتمال

الاتحاد ∪

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

إذا كان أ ، ب حدثان **متنافيان** فإن :

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

ملحوظة: امتى يطلب ل (أ ∪ ب) بالطريقة اللفظية؟

لو قلك : أوجد احتمال وقوع الحدث أ **أو** ب
أو قلك : أوجد احتمال وقوع أحد الحدثين **على الأقل**

إذا كانت أ ⊃ ب فإن : ل (أ ∪ ب) = ل (ب) الكبيرة

مثال

إذا كان ل(أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٥}$

أوجد : ل (أ ∪ ب)

الحل :

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ – $\frac{١}{٥}$ = $\frac{19}{30}$ بالآلة الحاسبة

شكل فن

أ ∪ ب = { ١، ٢، ٣، ٤ }

ل (أ ∪ ب) = $\frac{\text{عدد عناصر أ ∪ ب}}{\text{العدد الكلى}}$

= $\frac{٤}{٥}$

التقاطع ∩

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∪ ب)

إذا كان أ ، ب حدثان **متنافيان** فإن :

ل (أ ∩ ب) = **صفر** ، أ ∩ ب = Φ

ملحوظة: امتى يطلب ل (أ ∩ ب) بالطريقة اللفظية؟

لو قلك : أوجد احتمال وقوع الحدث أ **و** ب **معا**

إذا كانت أ ⊃ ب فإن : ل (أ ∩ ب) = ل (أ) الصغيرة

مثال

إذا كان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٧ أوجد : ل (أ ∩ ب)

الحل :

ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∪ ب)

= ٠,٢ + ٠,٦ – ٠,٧ = ٠,١

شكل فن

أ ∩ ب = { ١، ٢ }

ل (أ ∩ ب) = $\frac{\text{عدد عناصر أ ∩ ب}}{\text{العدد الكلى}}$

= $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$



الفرق −

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)

ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

إذا كان أ ، ب حدثان **متنافيان** فإن :

ل (أ − ب) = ل (أ)

ملحوظة: امتى يطلب **ل (أ − ب)** بالطريقة اللفظية؟

لو قالك : أوجد احتمال وقوع الحدث أ **فقط**
أو قالك : احتمال وقوع الحدث أ وعدم وقوع الحدث ب

لو عرفت الفرق والتقاطع فإن :

ل (أ) = ل (أ − ب) + ل (أ ∩ ب)

مثال

إذا كان ل(أ) = $\frac{1}{2}$ ، ل(ب) = $\frac{1}{3}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{1}{5}$

أوجد : ل (أ − ب) ، ل (ب − أ)

الحل :

ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{1}{2}$ − $\frac{1}{5}$ = $\frac{3}{10}$

ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{1}{3}$ − $\frac{1}{5}$ = $\frac{2}{15}$

شكل فن

أ − ب : هي العناصر الموجودة في أ ومش موجودة في **ب**
ب − أ : هي العناصر الموجودة في **ب** ومش موجودة في أ

ف: أ {١ ، ٣} ، أ ∩ ب {٢} ، ب {٤} ، خارجهما ٨

أ − ب = { ١ ، ٣ }

ل (أ − ب) = $\frac{2}{5}$

ب − أ = { ٤ }

ل (ب − أ) = $\frac{1}{5}$

المكملة /

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

ل (أَ) = ١ − ل (أ)

ل (أ) = ١ − ل (أَ)

القاعدة العامة :

ل (أ) + ل (أَ) = ١

ملحوظة: امتى يطلب **ل (أَ)** بالطريقة اللفظية؟

لو قالك : أوجد احتمال **عدم** وقوع الحدث أ

مثال

إذا كان ل (أ) = $\frac{1}{5}$ ، ل (ب) = $\frac{1}{3}$ ،

أوجد : ١) ل (أَ) ٢) احتمال عدم وقوع الحدث ب

الحل :

١) ل (أَ) = ١ − ل (أ) = ١ − $\frac{1}{5}$ = $\frac{4}{5}$

٢) **احتمال عدم وقوع الحدث ب : يقصد به ل (بَ)**

ل (بَ) = ١ − ل (ب) = ١ − $\frac{1}{3}$ = $\frac{2}{3}$

شكل فن

أَ : هي **كل** العناصر اللى قدامك **ما عدا** عناصر أ

ف: أ {١ ، ٣} ، أ ∩ ب {٢} ، ب {٤} ، خارجهما ٨

أَ = { ٤ ، ٨ }

ل (أَ) = $\frac{2}{5}$

بَ = { ١ ، ٣ ، ٨ }

ل (بَ) = $\frac{3}{5}$

أمثلة محلولة

١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ∩ب) = ٠,٢
أوجد : ل (أ ∪ ب) ، ل (أ − ب)

الحل

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل(أ ∩ ب)
= ٠,٣ + ٠,٦ − ٠,٢ = ٠,٧

ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)
= ٠,٣ − ٠,٢ = ٠,١

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان ل(أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(أ∪ب) = $\frac{٥}{٨}$
أوجد : ل (أ ∩ ب) ، ل (ب − أ)

الحل

ل(أ∩ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∪ ب)
= $\frac{٣}{٨}$ + $\frac{١}{٢}$ − $\frac{٥}{٨}$ = $\frac{٢}{٨}$ = $\frac{١}{٤}$

ل (ب − أ) = ل (ب) − ل(أ ∩ ب)
= $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان ل(أ) = ٠,٨ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(أ∩ب) = ٠,٦
فأوجد: (١) احتمال عدم وقوع الحدث أ
(٢) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

الحل

احتمال عدم وقوع الحدث أ معناه ل (أَ)
ل (أَ) = ١ − ل (أ)
= ١ − ٠,٨ = ٠,٢

احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل معناه ل (أ ∪ ب)
ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل(أ ∩ ب)
= ٠,٨ + ٠,٧ − ٠,٦ = ٠,٩

٤ إذا كان أ ، ب حدثين **متنافيين** من تجربة عشوائية
وكان ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$
فأوجد ل (ب)

الحل

∵ أ ، ب حدثان متنافيان ∴ ل (أ ∩ ب) = صفر
∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)
∴ $\frac{٧}{١٢}$ = $\frac{١}{٣}$ + ل (ب)
∴ ل (ب) = $\frac{٧}{١٢}$ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٧}{١٢}$ − $\frac{٤}{١٢}$ = $\frac{٣}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

٥ صندوق يحتوى على ١٢ كرة منها ٥ كرات زرقاء ، ٤ كرات حمراء وباقى الكرات بيضاء ، سحبت كرة عشوائيا فاحسب احتمال أن تكون الكرة :
(١) زرقاء (٢) ليست حمراء (٣) زرقاء أو حمراء

الحل

العدد الكلى = ١٢ ، عدد الكرات البيضاء = ٣

احتمال أن تكون زرقاء = $\frac{\text{عدد الكرات الزرقاء}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{٥}{١٢}$

احتمال ليست حمراء = $\frac{\text{عدد الكرات الزرقاء والبيضاء}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{٨}{١٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

احتمال زرقاء أو حمراء = $\frac{\text{عدد الكرات الزرقاء والحمراء}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{٩}{١٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

٦ إذا كان ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$
، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد : ل(أ ∪ ب) ، ل (أ − ب)

الحل

....
....
....
....
....
....

٧ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان ل (ب) = $\frac{١}{١٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$

فأوجد ل(أ) إذا كان: ① أ ، ب متنافيان
② ب ⊃ أ

الحل

أولاً : إذا كان أ ، ب متنافيان :

∴ ل (أ ∩ ب) = صفر

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

$\frac{١}{٣}$ = ل (أ) + $\frac{١}{١٢}$

ل(أ) = $\frac{١}{٣}$ - $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

ثانيا : إذا كانت ب ⊃ أ :

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) الاتحاد = الكبيرة

∴ ل (أ) = $\frac{١}{٣}$

٨ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان ل (أ) = ٠,٥ ، ل(أ∪ب) = ٠,٨ ، ل(ب)= س

فأوجد قيمة س إذا كان : ① أ ، ب متنافيان
② ل (أ ∩ ب) = ٠,١

الحل

أولاً : إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان :

∴ ل (أ ∩ ب) = صفر

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

٠,٨ = ٠,٥ + ل (ب)

ل (ب) = ٠,٨ – ٠,٥ = ٠,٣

ثانيا : إذا كان ل (أ ∩ ب) = ٠,١

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

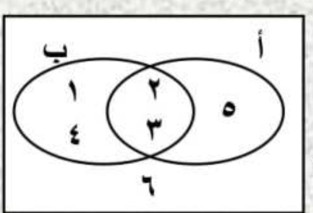
٠,٨ = ٠,٥ + ل(ب) – ٠,١

ل(ب) = ٠,٨ – ٠,٤ = ٠,٤

تصميم محمود عوض

٩ باستخدام شكل فن المقابل أوجد :

١) ل(أ ∩ ب)
٢) ل (أ - ب)
٣) احتمال عدم وقوع الحدث أ



الحل

العدد الكلى ف = ٦

١) أ ∩ ب = { ٢ ، ٣ } عدد العناصر = ٢

ل (أ ∩ ب) = $\frac{\text{عدد عناصر أ ∩ ب}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

---

٢) أ – ب = { ٥ } عدد عناصره = ١

ل(أ – ب) = $\frac{\text{عدد عناصر أ - ب}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{١}{٦}$

---

٣) احتمال عدم وقوع أ يقصد به ل (أ َ)

أ َ = { ١ ، ٤ ، ٦ } عدد عناصره = ٣

ل (أ َ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

١٠ باستخدام شكل فن أوجد :

ل (أ ∩ ب) ، ل (أ ∪ ب)

ل (ب ∩ جـ)

ل (أ – ب) ، ل (ب َ)

الحل

انت أقوى من شكل فن

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريبات

١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان ل(أ) = $\frac{٤}{٩}$ ، ل(ب) = $\frac{٣}{٩}$ ، ل(أ∩ب) = $\frac{١}{٩}$

أوجد : ل (أ ∪ ب) ، ل (أ − ب)

ل (ب − أ) ، ل (أَ)

الحل

....

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد ل (أ ∪ ب)

إذا كان: ① ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ ② أ، ب متنافيان

الحل

....

٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٥

، ل (أ ∪ ب)= ٠,٢

أوجد : ل(أ∩ب) ، ل (ب − أ)

الحل

....

٤ كيس به ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ ، سحبت بطاقة عشوائيا ، أوجد احتمال أن تكون البطاقة تحمل عددا :

① يقبل القسمة على ٣ و يقبل القسمة على ٥

② يقبل القسمة على ٣ أو يقبل القسمة على ٥

الحل

....

أسئلة اختر على الإحصاء

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن ل (أ ∩ ب) = ...

أ) صفر ب) ١ جـ) ٠,٥ د) Φ

٢ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن أ ∩ ب = ...

أ) Φ ب) صفر جـ) ٠,٥٦ د) ١

٣ إذا كانت أ ⊂ ف لتجربة عشوائية ما وكان ل (أ) = ٢ ل (أَ) فإن ل (أ) = ...

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{٢}{٣}$ د) ١

٤ إذا كان ل (أ) = ل (أَ) فإن ل (أَ) = ...

أ) صفر ب) ١ جـ) $\frac{١}{٤}$ د) $\frac{١}{٢}$

٥ إذا كان أ ⊃ ب فإن ل (أ ∪ ب) تساوى ....

أ) صفر ب) ل (أ) جـ) ل (ب) د) ل (أ ∩ ب)

٦ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين وكان ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فإن ل (ب) = ...

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

---

٧ إذا كان احتمال وقوع الحدث أ هو ٦٥% فإن احتمال عدم وقوعه يساوى ....

أ) ٠,٣٥ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) ٠,٦٥ د) ١

٨ إذا كان احتمال وقوع الحدث أ هو ٧٥% فإن احتمال عدم وقوعه هو ....

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $\frac{١}{٤}$ د) ١

٩ إذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوى ....

أ) صفر% ب) ٢٥% جـ) ٥٠% د) ١٠٠%

١٠ إذا ألقى حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجى وظهور عدد فردى يساوى ....

أ) صفر ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $\frac{٣}{٤}$ د) ١

١١ إذا ألقى حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد أكبر من ٤ يساوى ....

أ) صفر ب) $\frac{٢}{٣}$ جـ) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{١}{٦}$

تصميم محمود عوض
معلم اول رياضيات



تراكمى

1. إذا كانت النسبة بين محيطى مربعين ١ : ٢ فإن النسبة بين مساحتيهما = ١ : ٤

2. المعكوس الجمعى للكسر $\frac{٣}{س^٢ + ١}$ هو $\frac{-٣}{س^٢ + ١}$

3. إذا كان س عددا سالبا فإن أكبر الأعداد التالية هو ٣ – س

أ) ٣ + س ب) ٣س جـ) ٣ ـ س د) $\frac{٣}{س}$

4. **إذا كان $أ^٢$ ـ $ب^٢$ = ٢١ ، أ + ب = ٧ فإن أ ـ ب =** ٣

5. إذا كان عمر رجل الآن س سنة فإن عمره بعد ٥ سنوات هو س + ٥ وعمره منذ ٣ سنوات هو س ـ ٣

6. احتمال الحدث المستحيل = صفر بينما احتمال الحدث المؤكد = ١

7. إذا كان $س^٢$ ـ $ص^٢$ = ٢ (س + ص) فإن س ـ ص = ٢

8. إذا كان (٥ ، س – ٧) = (ص + ١ ، –٥) **فإن س + ص =** ٢+٤ = ٦

9. الدالة د حيث د(س) = $س^٦$ + $٢س^٤$ – ٣ كثيرة حدود من الدرجة السادسة

10. إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٢$ – أ يمر بالنقطة (١ ، ٠) فإن أ = ١

11. عددان موجبان مجموعهما ٧ ، وحاصل ضربهما ١٢ فإن العددين هما ٣ ، ٤

12. إذا كان ٢س = ١ فإن $\frac{١}{٥}$ س = $\frac{١}{٥} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{١٠}$

13. مجموعة حل المعادلة ٢س + ٤ = ٠ في ط هى ....

14. إذا كان المقدار $س^٢$ + ك س + ٣٦ مربعا كاملا فإن ك = ± ١٢

15. إذا كان $٥^{س}$ = ٤ فإن $٥^{س-١}$ = $٥^{س} \times ٥^{-١}$ = ٤ × $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٤}{٥}$

16. إذا كان $٣^{س+٧}$ = ١ فإن **س** = –٧

17. إذا كان $٣^{س}$ + $٣^{س}$ + $٣^{س}$ = $٣^{س} \times ٣ = ٣^{س+١}$

18. $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = ٨ + ٢

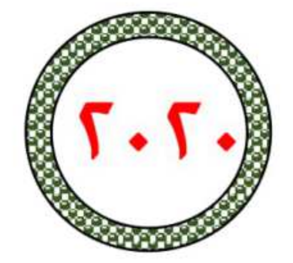
19. مجموعة حل المعادلة $س^٢$ + ٤ = ٠ في ح هي ....

20. إذا كانت $س^٢$ $ص^{-٢}$ = ٨١ فإن $\frac{س}{ص}$ = ...

21. [١ ، ٥] ∪]–٢ ، ٣] = ...

انتهت المذكرة مع تمنياتى للجميع بالتوفيق ،، محمود عوض حسن





الصف الثالث الإعدادي



إهداء إلى الطالبة







إعداد وتصميم



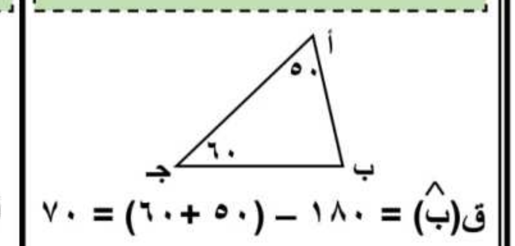
معلم أول رياضيات

استعدوا للمغامرة



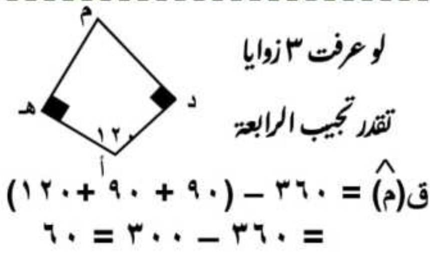
أساسيات تراكمية

مجموع قياسات زوايا ∆ = ١٨٠



ق(ب^) = ١٨٠ − (٥٠ + ٦٠) = ٧٠

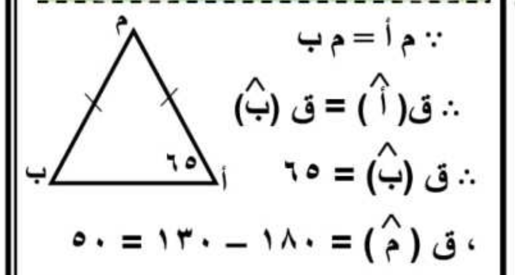
مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠



لو عرفت ٣ زوايا تقدر تجيب الرابعة

ق(م^) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ١٢٠)
= ٣٦٠ − ٣٠٠ = ٦٠

في المثلث المتساوى الساقين زاويتا القاعدة متساويتان



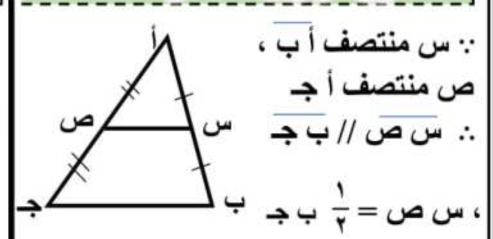
∵ م أ = م ب

∴ ق(أ^) = ق (ب^)

∴ ق (ب^) = ٦٥

، ق (م^) = ١٨٠ − ١٣٠ = ٥٠

القطعة الواصلة بين منتصفى ضلعين توازى الضلع الثالث

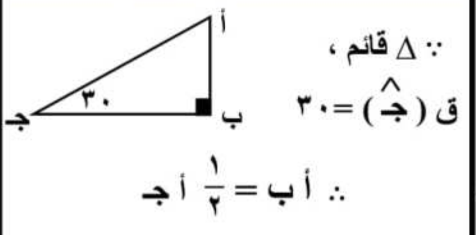


∵ س منتصف أ ب ،
ص منتصف أ جـ

∴ س ص // ب جـ

، س ص = ١/٢ ب جـ

طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ = نصف طول الوتر

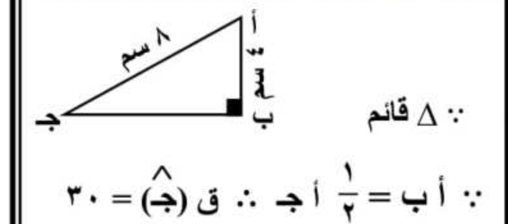


∵ ∆ قائم ،

ق (جـ^) = ٣٠

∴ أ ب = ١/٢ أ جـ

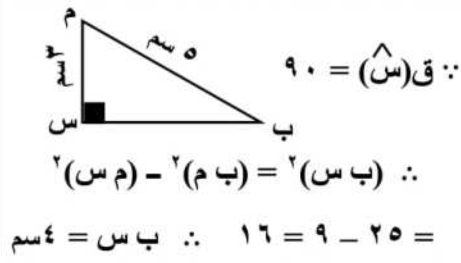
إذا كان طول الضلع = نصف طول الوتر فإن الزاوية المقابلة له = ٣٠



∵ ∆ قائم

∵ أ ب = ١/٢ أ جـ ∴ ق (جـ^) = ٣٠

نظرية فيثاغورث



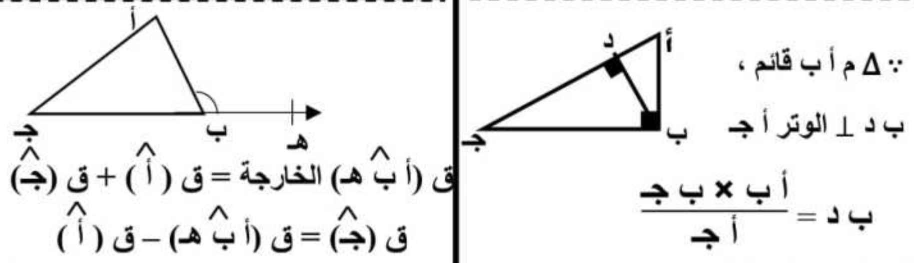
∵ ق(س^) = ٩٠

∴ (ب س)^2 = (ب م)^2 − (م س)^2

= ٢٥ − ٩ = ١٦ ∴ ب س = ٤سم

نظرية إقليدس

قياس الزاوية الخارجة عن المثلث = مجموع الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة



∵ ∆ م أ ب قائم ،

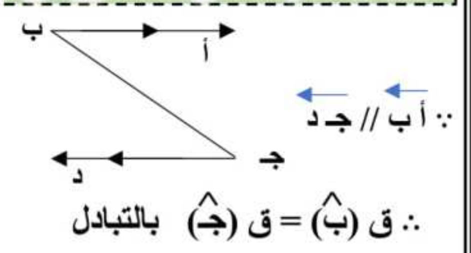
ب د ⊥ الوتر أ جـ

ب د = (أ ب × ب جـ) / أ جـ

ق (أ ب^ هـ) الخارجة = ق (أ^) + ق (جـ^)

ق (جـ^) = ق (أ ب^ هـ) − ق (أ^)

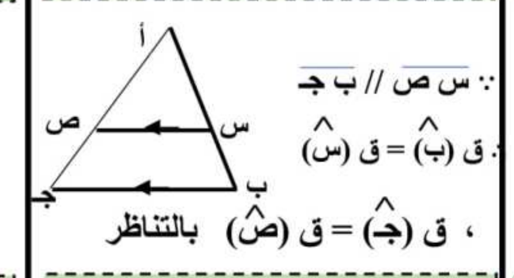
إذا وجد توازى حرف Z فإن الزاويتان المتبادلتان متساويتان



∵ أ ب // جـ د

∴ ق (ب^) = ق (جـ^) بالتبادل

إذا وجد توازى حرف F فإن الزاويتان المتناظرتان متساويتان



∵ س ص // ب جـ

∴ ق (ب^) = ق (س^)

، ق (جـ^) = ق (ص^) بالتناظر

إذا وجد توازى حرف U فإن الزاويتان المتداخلتان متكاملتان

د
أ
جـ
ب

∵ أ ب // جـ د

∴ ق (ب^) + ق (جـ^) = ١٨٠

لإثبات التوازى

نبحث عن إحدى الحالات الآتية:

- ◆ زاويتان متبادلتان متساويتان
- ◆ زاويتان متناظرتان متساويتان
- ◆ زاويتان متداخلتان متكاملتان

حالات تطابق مثلثين

- ضلعان والزاوية المحصورة بينهما
- زاويتان والضلع المرسوم بينهما
- وتر وضلع (في المثلث القائم)

المثلث المتساوى الأضلاع

أضلاعه متساوية في الطول

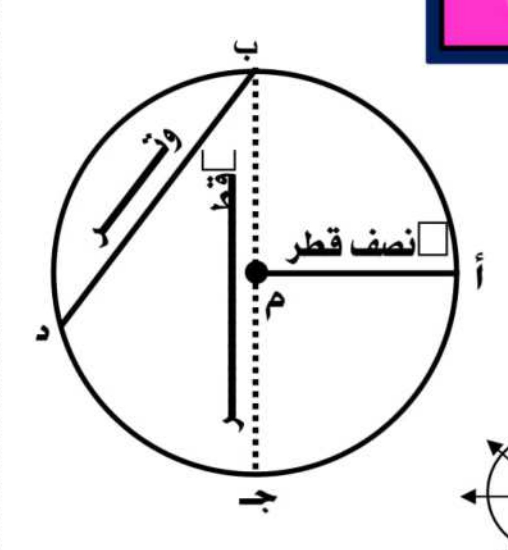
زواياه متساوية في القياس





إعداد / محمود عوض

مفاهيم أساسية



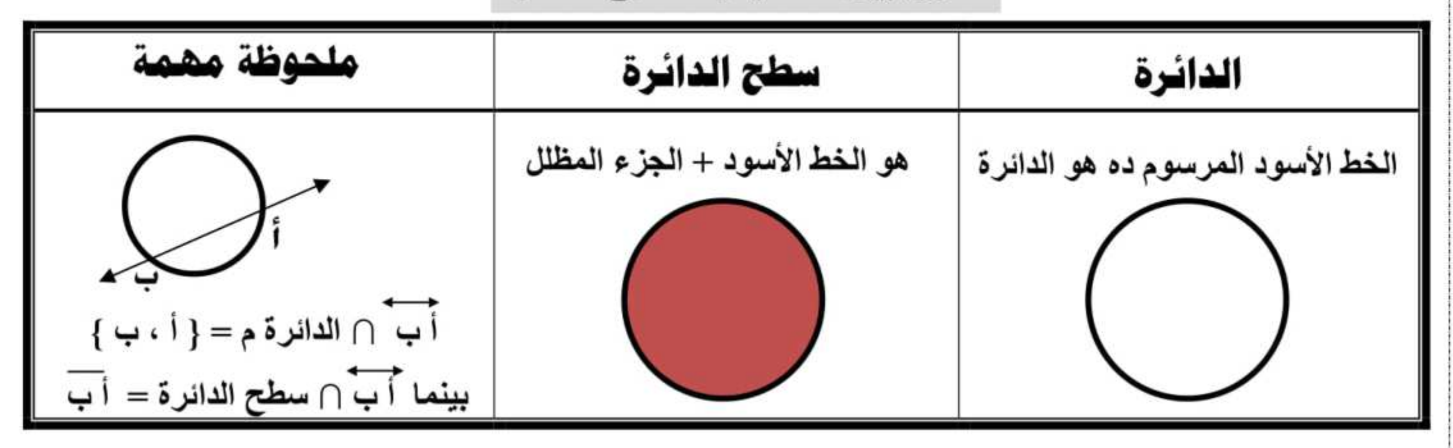
نصف القطر : هو قطعة مستقيمة طرفاها مركز الدائرة وأى نقطة على الدائرة

الوتر : هو قطعة مستقيمة طرفاها أي نقطتين على الدائرة

القطر : هو وتر مار بمركز الدائرة ، وهو أطول الأوتار طولا

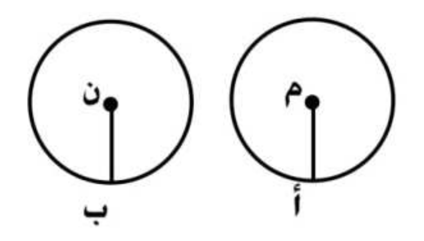
محور التماثل : هو المستقيم المار بمركز الدائرة.
الدائرة لها عدد لا نهائي من محاور التماثل
عدد محاور تماثل نصف أو ربع أو ثلث الدائرة محور واحد

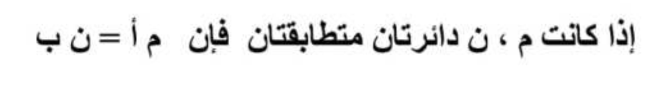
الفرق بين الدائرة وسطح الدائرة



الدائرة	سطح الدائرة	ملحوظة مهمة
الخط الأسود المرسوم ده هو الدائرة	هو الخط الأسود + الجزء المظلل	$\overleftrightarrow{أ ب}$ ∩ الدائرة م = { أ ، ب } بينما $\overleftrightarrow{أ ب}$ ∩ سطح الدائرة = $\overline{أ ب}$

الدائرتان المتطابقتان : هما دائرتان أنصاف أقطارهما متساوية في الطول.





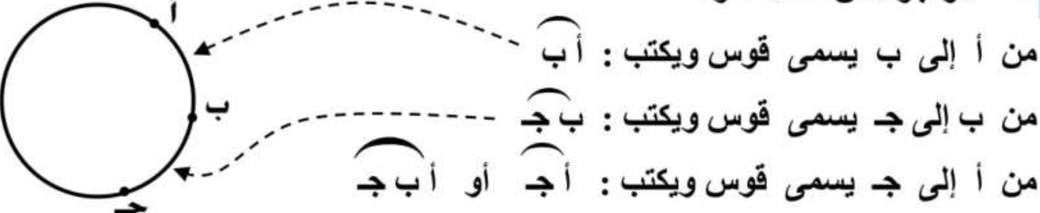
إذا كانت م ، ن دائرتان متطابقتان فإن م أ = ن ب

القوس : هو جزء من خط الدائرة

من أ إلى ب يسمى قوس ويكتب : $\overset{\frown}{أ ب}$

من ب إلى جـ يسمى قوس ويكتب : $\overset{\frown}{ب جـ}$

من أ إلى جـ يسمى قوس ويكتب : $\overset{\frown}{أ جـ}$ أو $\overset{\frown}{أ ب جـ}$



مساحة الدائرة = π نق²

محيط الدائرة = ٢ π نق

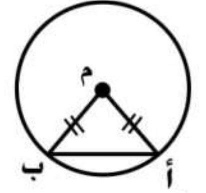
طول نصف الدائرة = π نق

طول ربع الدائرة = $\frac{١}{٢}$ π نق

نتائج هامة



أنصاف الأقطار في الدائرة الواحدة متساوية في الطول



∵ م أ ، م ب أنصاف أقطار

∴ م أ = م ب

أي أن : ق (أ^) = ق (ب^)

مثال ١



أوجد ق (م أ^ ب)

الحل :

∵ م أ = م ب أنصاف أقطار

∴ ق (أ^) = ق (ب^)

= (١٨٠ − ٨٠) ÷ ٢ = ٥٠

تدريب ١



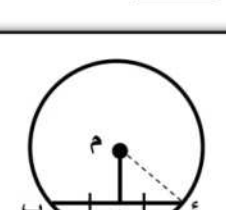
أوجد ق (أ م^ ب)

....

....

....

المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أي وتر فيها يكون عموديا على هذا الوتر

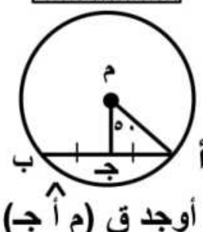


∵ د منتصف الوتر أ ب

∴ م د ⊥ أ ب

∴ ق (م د^ أ) = ٩٠

مثال ٢



أوجد ق (م أ^ جـ)

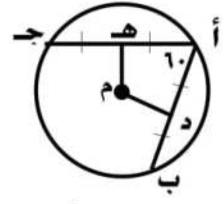
الحل :

∵ جـ منتصف أ ب ∴ م جـ ⊥ أ ب

∴ ق (م جـ^ أ) = ٩٠

∴ ق (م أ^ جـ) = ١٨٠ − (٥٠+٩٠) = ٤٠

تدريب ٢



أوجد ق (د م^ هـ)

....

....

....

المستقيم المار بمركز الدائرة وعمودياً على أي وتر فيها ينصف هذا الوتر

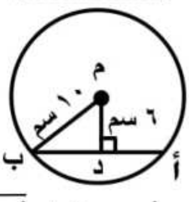


∵ م د ⊥ أ ب

∴ د منتصف أ ب ∴ أ د = د ب

فإذا كان أ ب = ٨سم فإن أ د = ٤سم

مثال ٣



أوجد طول أ د

الحل :

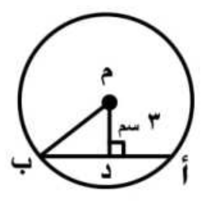
في Δ م د ب من فيثاغورث

د ب = ٨ سم

∵ م د ⊥ أ ب ∴ د منتصف أ ب

∴ أ د = د ب = ٨ سم

تدريب ٣



أب = ٨ سم أوجد م ب

....

....

....

١ في الشكل المقابل :

د ، هـ منتصفا أب ، أجـ

على الترتيب

ق (أ) = ١٢٠°

اثبت أن Δ س ص م متساوى الأضلاع

الحل

∵ د منتصف أب ∴ م د ⊥ أب

∴ ق (م د̂ أ) = ٩٠°

∵ هـ منتصف أجـ ∴ م هـ ⊥ أجـ

∴ ق (م هـ̂ أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق (د م̂ هـ) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ١٢٠) = ٦٠°

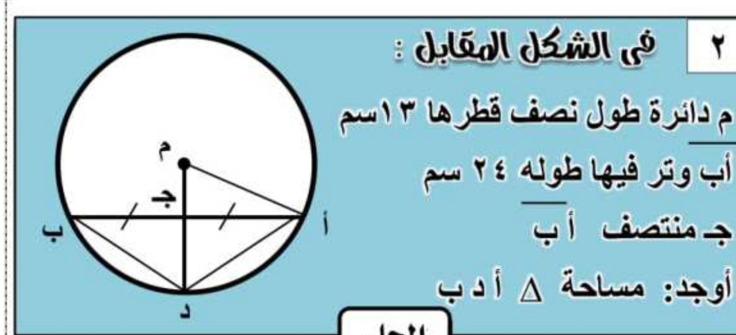
∴ ق (ص م̂ س) = ٦٠° بالتقابل بالرأس

∵ م ص = م س (أنصاف أقطار)

∴ ق (م ص̂ س) = ق (م س̂ ص) = ٦٠°

∴ Δ س ص م متساوى الأضلاع (جميع زواياه ٦٠°)

٢ في الشكل المقابل :



م دائرة طول نصف قطرها ١٣سم

أب وتر فيها طوله ٢٤ سم

جـ منتصف أب

أوجد: مساحة Δ أ د ب

الحل

∵ جـ منتصف أب ∴ م جـ ⊥ أب ∴ ق (م جـ̂ أ) = ٩٠°

∵ أب = ٢٤ سم ∴ أجـ = ١٢ سم

في Δ م جـ أ القائم : بتطبيق فيثاغورث

∴ (م جـ)٢ = (١٣)٢ − (١٢)٢ = ١٦٩ − ١٤٤ = ٢٥

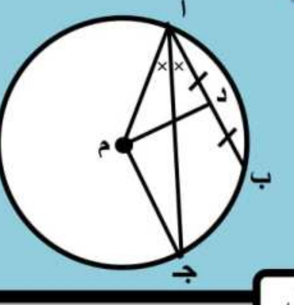
∴ م جـ = ٥ سم ، ∵ م د = ١٣ سم

∴ جـ د = ١٣ − ٥ = ٨ سم

∵ مساحة المثلث = ½ طول القاعدة × الارتفاع

∴ مساحة Δ أ د ب = ½ × ٢٤ × ٨ = ٩٦ سم٢

٣ في الشكل المقابل :



أب وتر في الدائرة م

أجـ ينصف ب أ̂ م

د منتصف أب

اثبت أن د م ⊥ جـ م

الحل

في Δ أ م جـ : ∵ م أ = م جـ (أنصاف أقطار)

∴ ق (م أ̂ جـ) = ق (م جـ̂ أ) ⟵ (١)

∵ ق (م أ̂ جـ) = ق (ب أ̂ جـ) ⟵ (٢) معطى

من ١ ، ٢ ينتج أن:

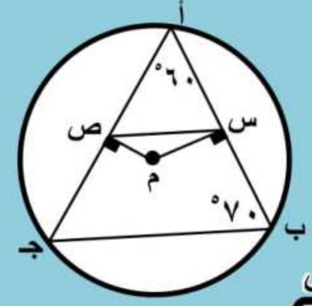
ق (م جـ̂ أ) =ق (ب أ̂ جـ) وهما متبادلتان

∴ أب // جـ م

، ∵ د منتصف أب ∴ م د ⊥ أب

∵ أب // جـ م ∴ دم ⊥ جـ م

٤ في الشكل المقابل :



م س ⊥ أب ، م ص ⊥ أجـ

ق (أ) = ٦٠°

ق (ب) = ٧٠°

أوجد قياسات زوايا Δ م س ص

الحل

ق (جـ) = ١٨٠ − (٧٠ + ٦٠) = ٥٠°

∵ م س ⊥ أب ∴ س منتصف أب

∵ م ص ⊥ أجـ ∴ ص منتصف أجـ

∴ س ص // ب جـ (قطعة واصلة بين منتصفى ضلعين)

∴ ق(أ س̂ ص) = ٧٠° ، ق(أ ص̂ س) = ٥٠° بالتناظر

∴ ق (م س̂ ص) = ٩٠ − ٧٠ = ٢٠°

، ق (م ص̂ س) = ٩٠ − ٥٠ = ٤٠°

في Δ س م ص :

ق (س م̂ ص) = ١٨٠ − (٢٠ + ٤٠) = ١٢٠°

١

دائرتان متحدتا المركز م
أ ب وتر في الدائرة الكبرى
يقطع الصغرى في جـ ، د
اثبت أن : أ جـ = ب د

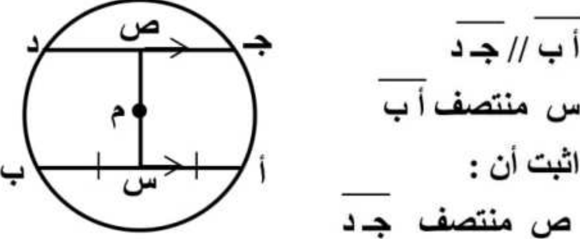


الحل

العمل : نرسم م هـ عمودى على أ ب

٢

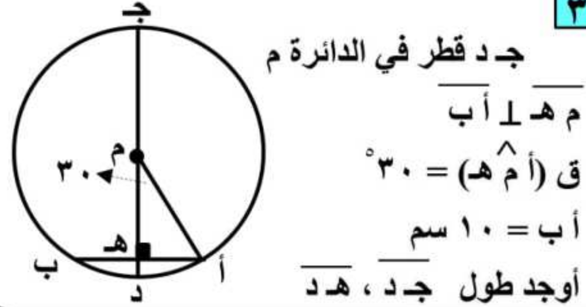
أ ب // جـ د
س منتصف أ ب
اثبت أن :
ص منتصف جـ د



الحل

٣

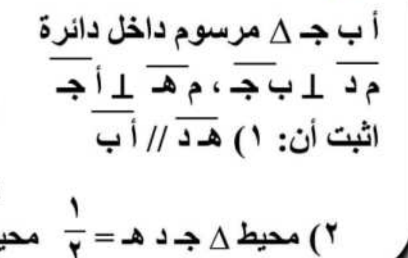
جـ د قطر في الدائرة م
م هـ ⊥ أ ب
ق (أ م̂ هـ) = ٣٠°
أ ب = ١٠ سم
أوجد طول جـ د ، هـ د



الحل

٤

أ ب جـ △ مرسوم داخل دائرة
م د ⊥ ب جـ ، م هـ ⊥ أ جـ
اثبت أن: ١) هـ د // أ ب
٢) محيط △ جـ د هـ = $\frac{١}{٢}$ محيط △ أ ب جـ



الحل

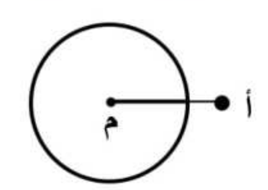


أوضاع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة

أوضاع نقطة بالنسبة لدائرة

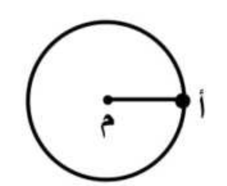
إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة فإن النقطة أ تقع :

خارج الدائرة



إذا كان : م أ > نق

على للدائرة



إذا كان : م أ = نق

داخل الدائرة



إذا كان : م أ < نق

على المركز

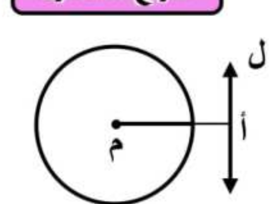


إذا كان : م أ = صفر

أوضاع مستقيم بالنسبة لدائرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة ∋ المستقيم فإن المستقيم يكون :

خارج الدائرة



إذا كان : م أ > نق

ل ∩ الدائرة م = Φ

ل ∩ سطح م = Φ

مماس للدائرة

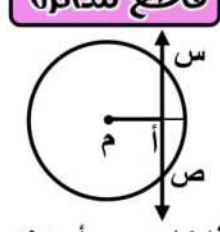


إذا كان : م أ = نق

ل ∩ الدائرة م = { أ }

ل ∩ سطح م = { أ }

قاطع للدائرة



إذا كان : م أ < نق

ل ∩ الدائرة م = { س ، ص }

ل ∩ سطح م = $\overline{\text{س ص}}$

تدريب

إذا كانت م دائرة طول قطرها ٨ سم ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٤ سم فإن المستقيم ل يكون ....

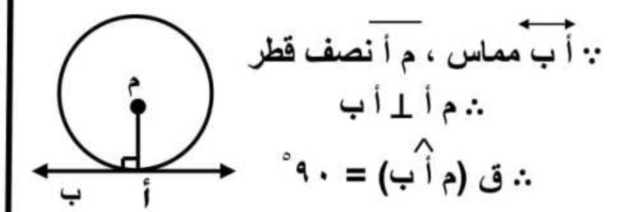
إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة في المستوى بحيث م أ = ٤ سم فإن أ تقع .... الدائرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، والمستقيم ل مماس ، فإن المستقيم ل يبعد عن مركزها .... سم

نتائج هامة على المماس

إعداد / محمود عوض

المماس عمودى على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس



∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس ، $\overline{مأ}$ نصف قطر

∴ م أ ⊥ أ ب

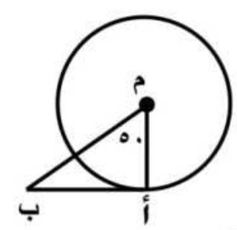
∴ ق (م $\hat{أ}$ ب) = ٩٠°

تدريب

في الشكل المقابل :

$\overleftarrow{أب}$ مماس للدائرة

أوجد ق ($\hat{ب}$)



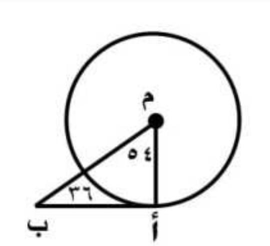
الحل

لإثبات أن المستقيم مماس

هنثبت ان الزاوية اللى بينه وبين نصف القطر قياسها ٩٠

تدريب في الشكل المقابل

اثبت أن $\overleftarrow{أب}$ مماس



الحل

في Δ م أ ب :

ق (م $\hat{أ}$ ب) = ١٨٠ – (٣٦+٥٤) = ٩٠°

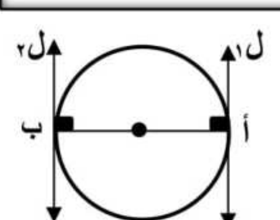
∴ $\overleftarrow{أب}$ مماس

المماسان المرسومان من نهايتى قطر متوازيان

∵ $\overline{أب}$ قطر

، ل١ ، ل٢ مماسان

∴ $\overleftrightarrow{ل_١}$ // $\overleftrightarrow{ل_٢}$



ملحوظة : **المماسان المرسومان من نهايتى وتر متقاطعان**



مثال ١

$\overleftarrow{أد}$ مماس للدائرة عند د

هـ منتصف $\overline{بجـ}$

ق ($\hat{أ}$) = ٥٦°

أو جد ق (د $\hat{م}$ هـ)

الحل

∵ $\overleftarrow{أد}$ مماس ، $\overline{مد}$ نصف قطر ∴ $\overline{مد}$ ⊥ $\overline{أد}$

∴ ق (م $\hat{د}$ أ) = ٩٠°

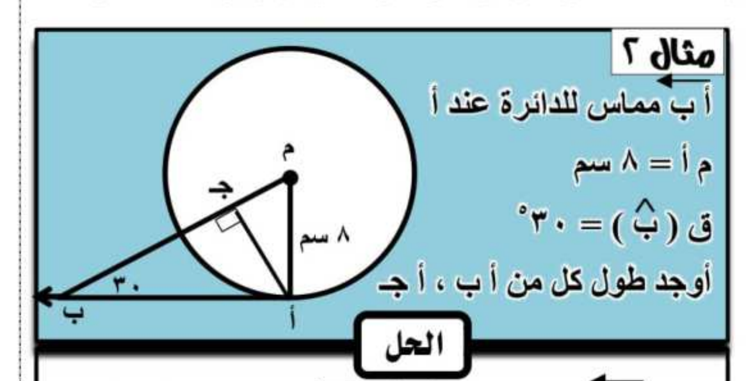
∵ هـ منتصف $\overline{جـب}$ ∴ $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{جـب}$

∴ ق (م $\hat{هـ}$ ب) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الشكل الرباعى م هـ أ د = ٣٦٠°

∴ ق (د $\hat{م}$ هـ) = ٣٦٠ – (٥٦ + ٩٠ + ٩٠)

= ٣٦٠ – ٢٣٦ = ١٢٤°



مثال ٢

$\overleftarrow{أب}$ مماس للدائرة عند أ

م أ = ٨ سم

ق ($\hat{ب}$) = ٣٠°

أوجد طول كل من أ ب ، أ جـ

الحل

∵ $\overleftarrow{أب}$ مماس ∴ $\overline{مأ}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ Δ م أ ب قائم

∵ ق(م $\hat{ب}$ أ) = ٣٠° ∴ م ب = ٢ × ٨ = ١٦ سم

من فيثاغورث : في Δ م أ ب

(أ ب)^{٢}= ٢٥٦ – ٦٤ = ١٩٢ ∴ أ ب = $\sqrt{١٩٢}$ = ٨ $\sqrt{٣}$

فى Δ أ ب جـ : ∵ أ جـ هو الضلع المقابل للزاوية ٣٠°

∴ أ جـ = $\frac{١}{٢}$ الوتر أ ب ∴ أ جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ $\sqrt{٣}$ = ٤ $\sqrt{٣}$

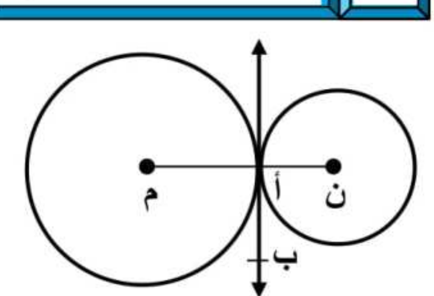
ملحوظة: يمكن حساب أ جـ باستخدام نظرية اقليدس

أوضاع دائرة بالنسبة لدائرة

إعداد / محمود عوض

إذا كانت م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما نق١ ، نق٢ ، م ن خط المركزين فإن الدائرتان تكونان :

١ متماستان من الخارج



✵ إذا كان : م ن = نق١ + نق٢

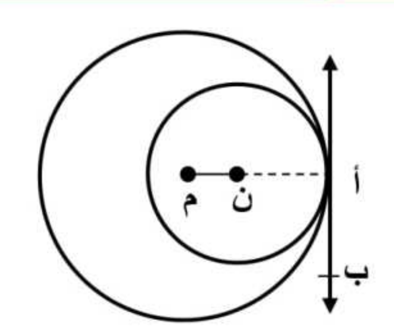
م ن = المجموع

✵ الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

✵ سطح م ∩ سطح ن = { أ }

✵ $\overleftrightarrow{أب}$ يسمى مماس مشترك

٢ متماستان من الداخل



✵ إذا كان : م ن = نق١ – نق٢

م ن = الطرح

✵ الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

✵ سطح م ∩ سطح ن = سطح ن

✵ $\overleftrightarrow{أب}$ يسمى مماس مشترك

٣ متقاطعتان

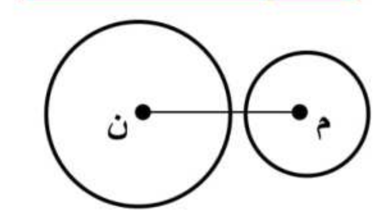
✵ نق١ – نق٢ < م ن < نق١ + نق٢

الطرح < م ن < المجموع

✵ الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}

✵ أ ب يسمى وتر مشترك

٤ متباعدتان



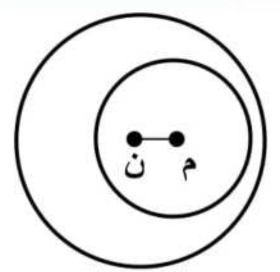
✵ إذا كان : م ن > نق١ + نق٢

م ن > المجموع

✵ الدائرة م ∩ الدائرة ن = Φ

✵ سطح م ∩ سطح ن = Φ

٥ متداخلتان



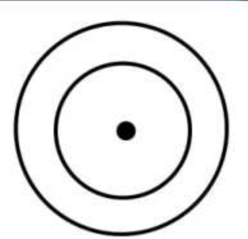
✵ م ن < نق١ – نق٢

م ن < الطرح

✵ الدائرة م ∩ الدائرة ن = Φ

✵ سطح م ∩ سطح ن = سطح م

٦ متحدتا المركز



✵ إذا كان : م ن = صفر

✵ الدائرة م ∩ الدائرة ن =

✵ سطح م ∩ سطح ن = سطح م

ملحوظة : عشان تحدد وضع الدائرتان اجمع نق١ + نق٢ واطرح نق١ – نق٢ وقارنهم بخط المركزين

تدريب

م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٩ سم ، ٥ سم حدد موضع الدائرتان عندما :

١- م ن = ١٤ سم الدائرتان ....

٢- م ن = ٤ سم الدائرتان ....

٣- م ن = ٣ سم الدائرتان ....

٤- م ن = ١٦ سم الدائرتان ....

٥- م ن = صفر الدائرتان ....

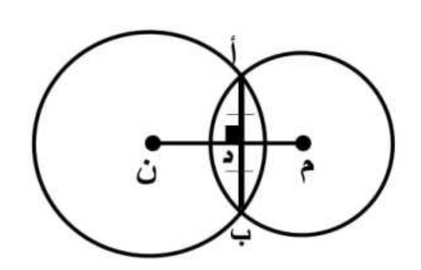
٦- م ن = ٧ سم الدائرتان ....

نتائج هامة على خط المركزين



في الدائرتان المتقاطعتان

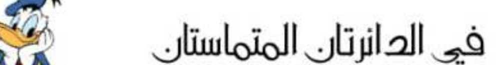
خط المركزين عمودى على الوتر المشترك وينصفه



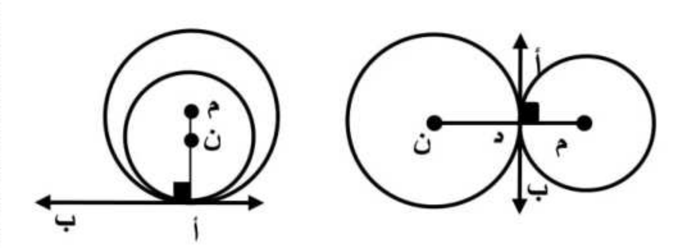
∵ $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك ، $\overline{\text{م ن}}$ خط المركزين

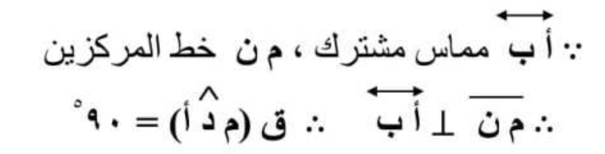
∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق ($\widehat{\text{م د أ}}$) = ٩٠°

، $\overline{\text{م ن}}$ ينصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ أ د = د ب



خط المركزين عمودى على المماس المشترك




∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك ، م ن خط المركزين

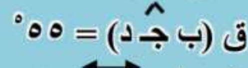
∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∴ ق ($\widehat{\text{م د أ}}$) = ٩٠°

تصميم محمود عوض
معلم أول رياضيات

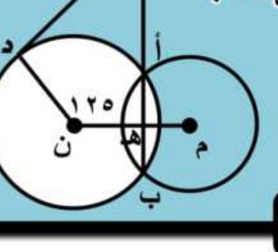
مثال ١

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

ق ($\widehat{\text{م ن د}}$) = ١٢٥°


ق ($\widehat{\text{ب جـ د}}$) = ٥٥°

اثبت أن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مماس



الحل

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ <u>وتر مشترك</u> ، $\overline{\text{م ن}}$ <u>خط المركزين</u>

∴ $\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{م ن}}$ ∴ ق ($\widehat{\text{أ هـ ن}}$) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق ($\widehat{\text{د}}$) = ٣٦٠ − (١٢٥ + ٥٥ + ٩٠) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{ن د}} \perp \overline{\text{جـ د}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مماس

(وهو المطلوب اثباته)

مثال ٢

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

م أ = ٦سم ، ن أ = ٨سم

$\overline{\text{م أ}} \perp \overline{\text{أ ن}}$

أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$

الحل

<u>فى Δ أ م ن (من فيثاغورث)</u> :

∵ $\overline{\text{م أ}} \perp \overline{\text{م ن}}$ ∴ $(\text{م ن})^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

∴ م ن = ١٠ سم

∵ أ ب وتر مشترك ∴ م ن ⊥ أ ب

<u>من إقليدس</u> : أ جـ = $\frac{\text{أ م} \times \text{أ ن}}{\text{م ن}} = \frac{6 \times 8}{10} = 4.8$ سم

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك ∴ م ن ينصف $\overline{\text{أ ب}}$

∴ أ ب = ٢ × ٤,٨ = ٩,٦ سم

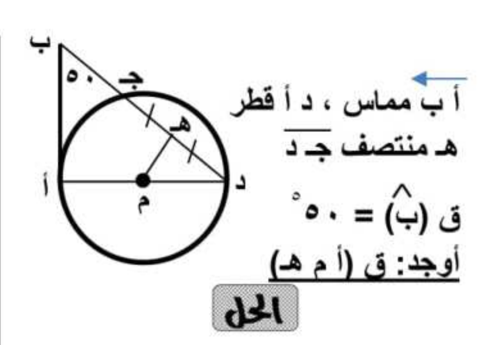
تدريبات

أ ب مماس ، د أ قطر

هـ منتصف $\overline{جـ د}$

ق ($\hat{ب}$) = ٥٠°

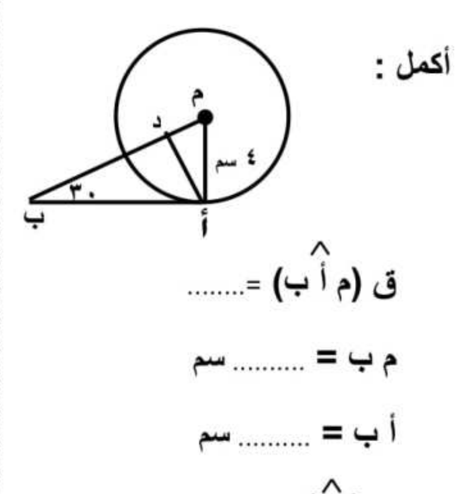
أوجد: ق (أ م هـ)



الحل

أ ب مماس

أوجد طول $\overline{د ب}$



الحل

أكمل :

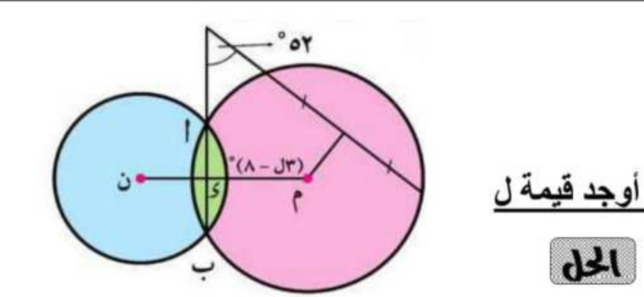
ق (م $\hat{أ}$ ب) =........

م ب = ... سم

أ ب = ... سم

ق ($\hat{م}$) = ...

أ د = ... سم



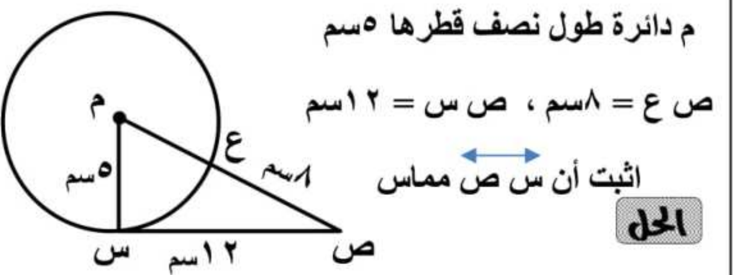
أوجد قيمة ل

الحل

م دائرة طول نصف قطرها ٥سم

ص ع = ٨سم ، ص س = ١٢سم

اثبت أن $\overleftrightarrow{س ص}$ مماس



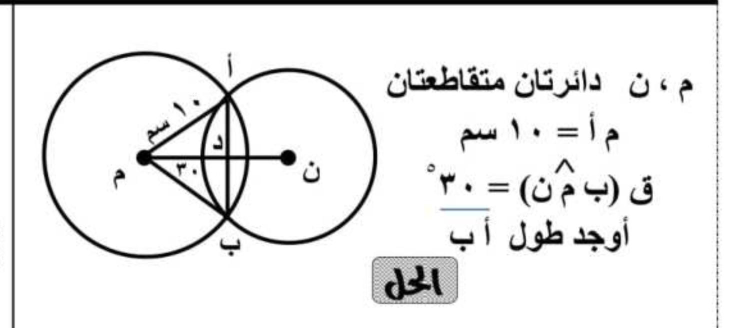
الحل

م ، ن دائرتان متقاطعتان

م أ = ١٠ سم

ق (ب $\hat{م}$ ن) = ٣٠°

أوجد طول $\overline{أ ب}$



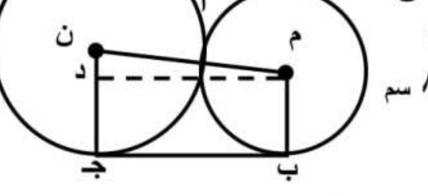
الحل

م ، ن دائرتان متماستان

$\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس مشترك

م ب = ٥ سم ، ن جـ = ٨ سم

أوجد طول $\overline{ب جـ}$



الحل

العمل : نرسم $\overline{م د}$ ⊥ $\overline{ن جـ}$

∵ ب جـ مماس مشترك ∴ $\overline{م ب}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{ن جـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∴ الشكل م ب جـ د مستطيل

∴ د جـ = م ب = ٥سم ∴ ن د = ٨ – ٥ = ٣ سم

م ن = ٥ + ٨ = ١٣سم ومن فيثاغورث في Δ م د ن:

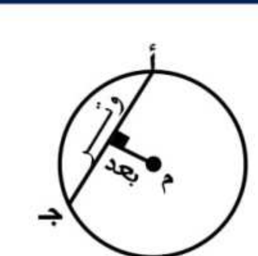
(م د)^{٢} = ١٦٩ – ٩ = ١٦٠ م د = ٤ $\sqrt{١٠}$ ، ب جـ = ٤ $\sqrt{١٠}$

العلاقة بين الأوتار والأبعاد

إعداد / محمود عوض

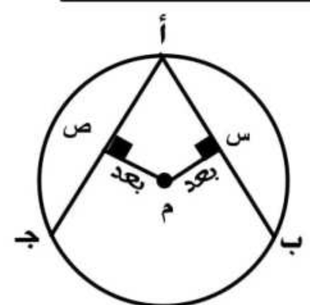
البعد لازم يكون عمودى

ولو قالك انه ينصف الوتر استنتج من التنصيف انه عمودى



في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

إذا كانت الأوتار متساوية
فإن الأبعاد تكون متساوية

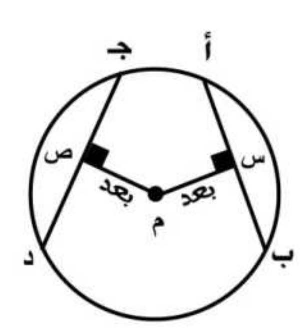


∵ أ ب = أ جـ
(الأوتار متساوية)

∴ م س = م ص
(الأبعاد متساوية)

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

إذا كانت الأبعاد متساوية
فإن الأوتار تكون متساوية



∵ م س = م ص
(الأبعاد متساوية)

∴ أ ب = جـ د
(الأوتار متساوية)

لو عطالك وترين متساويين : استنتج ان البعدين متساويين والعكس.

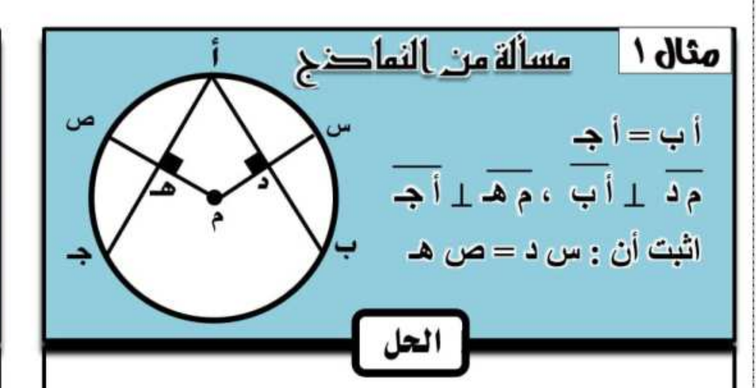
ولو طلب منك تثبت ان وترين متساويين : حاول تثبت ان البعدين متساويين والعكس.

مثال ١ مسألة من النماذج

أ ب = أ جـ

$\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أ جـ}$

اثبت أن : س د = ص هـ



الحل

∵ أ ب = أ جـ (أوتار متساوية)

، ∵ $\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أ جـ}$

∴ م د = م هـ ⟵ (١) (الأبعاد متساوية)

، ∵ م س = م ص ⟵ (٢) (أنصاف أقطار)

<u>بطرح ١ من ٢ ينتج أن :</u>

س د = ص هـ

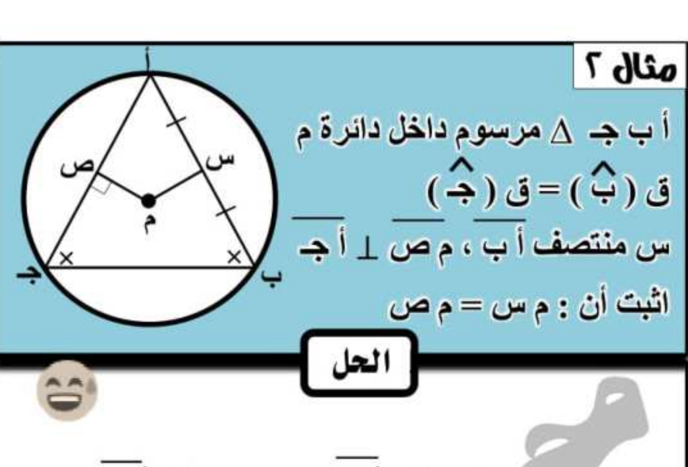
مثال ٢

أ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة م

ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$)

س منتصف $\overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{أ جـ}$

اثبت أن : م س = م ص



الحل

∵ س منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$

<u>فى Δ أ ب جـ :</u>

∵ ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$)

∴ أ ب = أ جـ <u>أوتار متساوية</u>

∴ م س = م ص <u>(الأبعاد متساوية)</u>

٣

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ،ب}

م س ⊥ أ د

م ص ⊥ ب د

اثبت أن: م س = م ص

الحل

∵ أ ب وتر مشترك ، م ن خط المركزين

∴ م ن ⊥ أ ب ، جـ منتصف أ ب

أي أنه في △ د أ ب : د جـ محور تماثل أ ب

لأن د جـ ⊥ أ ب و تنصفه

∴ △ د أ ب متساوى الساقين

∴ د أ = د ب وهى أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية

ملحوظة: يمكن الإثبات عن طريق تطابق △△ أدجـ ، ب دجـ

٤

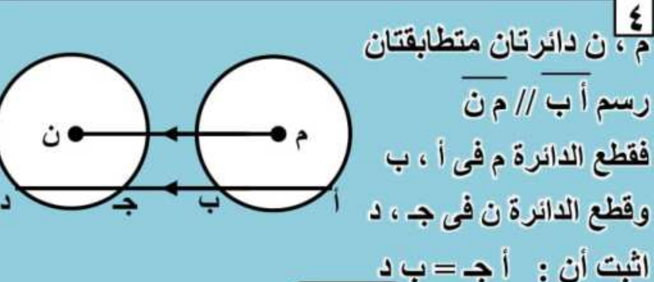
م ، ن دائرتان متطابقتان

رسم أ ب // م ن

فقطع الدائرة م فى أ ، ب

وقطع الدائرة ن فى جـ ، د

اثبت أن : أ جـ = ب د



الحل

العمل: نرسم م س ⊥ أ ب ، ن ص ⊥ جـ د

∵ م ن // أ ب ، م س ⊥ أ ب ، ن ص ⊥ جـ د

∴ الشكل م س ص ن مستطيل

∴ م س = م ص (أبعاد متساوية)

∴ أ ب = جـ د (الأوتار متساوية)

بإضافة ب جـ للطرفين

∴ أ جـ = ب د هـ ط ث

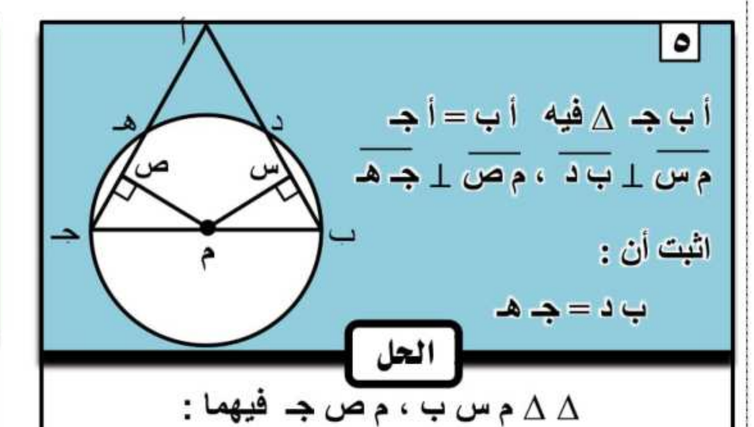
٥

أ ب جـ △ فيه أ ب = أ جـ

م س ⊥ ب د ، م ص ⊥ جـ هـ

اثبت أن :

ب د = جـ هـ



الحل

△ △ م س ب ، م ص جـ فيهما :

م ب = م جـ أنصاف أقطار

ق(م س^ ب) = ق (م ص^ جـ) = ٩٠°

ق(ب^) = ق (جـ^) لأن أ ب = أ جـ

∴ △ م س ب ≡ △ م ص جـ

ومن التطابق ينتج أن : م س = م ص (أبعاد)

، ∵ م س ⊥ ب د ، م ص ⊥ هـ جـ

∴ ب د = جـ هـ

٦

أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م

س ، ص منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب

ق (م س^ ص) = ٣٠°

اثبت أن : ١- △ م س ص متساوى الساقين

٢- △ أ س ص متساوى الأضلاع

الحل

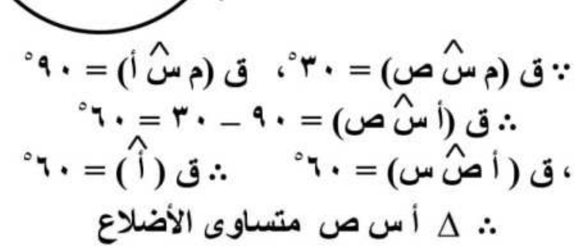
∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

∵ ص منتصف أ جـ ∴ م ص ⊥ أ جـ

∵ أ ب = أ جـ (أوتار متساوية)

∴ م س = م ص (أبعاد متساوية)

∴ △ م س ص متساوى الساقين



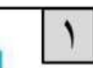
∵ ق (م س^ ص) = ٣٠° ، ق (م س^ أ) = ٩٠°

∴ ق (أ س^ ص) = ٩٠ − ٣٠ = ٦٠°

، ق (أ ص^ س) = ٦٠° ∴ ق (أ^) = ٦٠°

∴ △ أ س ص متساوى الأضلاع

تدريبات



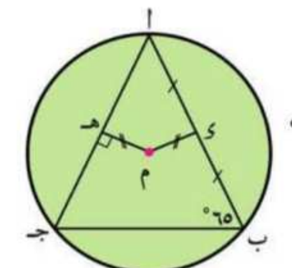
إذا كان:

م ى = م هـ

ق ($\angle$ ب) = ٦٥°

فأوجد :

ق ($\angle$ أ)

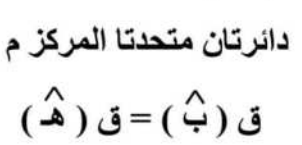


الحل

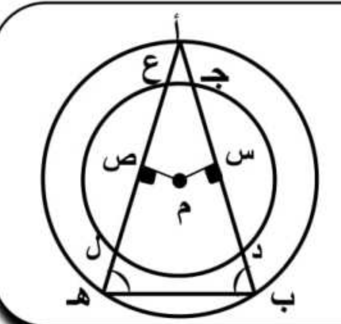
....

٢

دائرتان متحدتا المركز م



اثبت أن : جـ د = ع ل



الحل

....

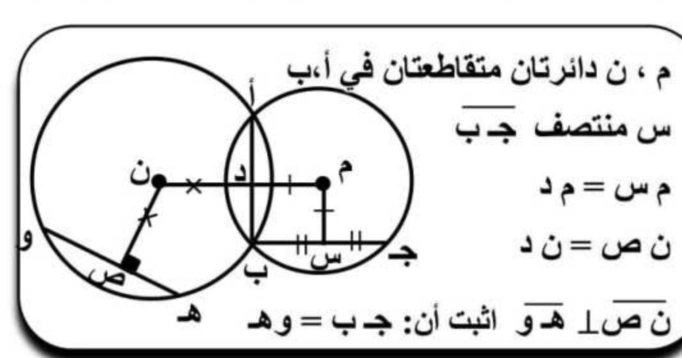
م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ،ب

س منتصف $\overline{جـ ب}$

م س = م د

ن ص = ن د

$\overline{ن ص} \perp \overline{هـ و}$ اثبت أن: جـ ب = و هـ



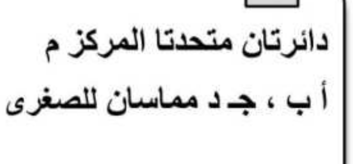
الحل

....

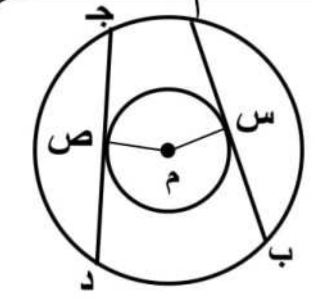
٤

دائرتان متحدتا المركز م

أ ب ، جـ د مماسان للصغرى



اثبت أن : أ ب = جـ د



الحل

....



إعداد / محمود عوض

تعيين الدائرة

تُعيَّن الدائرة إذا علم : ١- مركزها ٢- طول نصف قطرها

رسم دائرة تمر بنقطة

◆ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطة واحدة.

رسم دائرة تمر بنقطتين

◆ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطتين.

◆ ولكن إذا علم طول القطعة المستقيمة أ ب وطول نصف قطر المطلوبة فإن:

- إذا كان **نق** $>$ $\frac{1}{2}$ **أ ب** فإنه يمكن رسم **دائرتان** فقط .
- إذا كان **نق** $=$ $\frac{1}{2}$ **أ ب** فإنه يمكن رسم **دائرة واحدة** فقط وهى **أصغر** دائرة.
- إذا كان **نق** $<$ $\frac{1}{2}$ **أ ب** فإنه **لا يمكن** رسم أى دائرة.

مثال: إذا كانت أ ب قطعة مستقيمة طولها ٧ سم فإن أصغر دائرة يمكن أن تمر بالنقطتين أ ، ب طول نصف قطرها ......

رسم دائرة تمر بثلاث نقاط

◆ أي ثلاث نقاط على استقامة واحدة لا يمكن أن تمر بها دائرة.

◆ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بيها دائرة وحيدة.

الدائرة الخارجة للمثلث	الدائرة الداخلة للمثلث
مركزها هو نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها **(محاور تماثل أضلاعه)**	مركزها هو نقطة تقاطع **منصفات زواياه الداخلة**

❖ **يمكن رسم دائرة تمر برؤوس كل من : المستطيل - المربع - شبه المنحرف المتساوى الساقين**

❖ **لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس : متوازى الأضلاع - المعين - شبه المنحرف غير المتساوى الساقين**

تدريب :

١) ارسم القطعة أ ب = ٤ سم ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٤ سم تمر بالنقطتين أ ، ب

٢) ارسم $\triangle$ أ ب جـ المتساوى الأضلاع طول ضلعه ٤ سم ثم ارسم دائرة تمر برؤوسه ثم حدد موضع الدائرة بالنسبة لارتفاعاته.

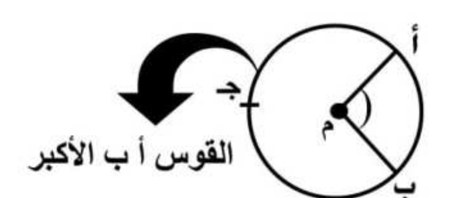
الوحدة الخامسة

الزاوية المركزية وقياس الأقواس

الزاوية المركزية

هي زاوية رأسها مركز الدائرة ويحمل ضلعيها أنصاف أقطار

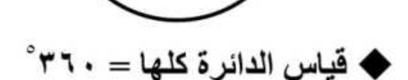
- أ م ب زاوية مركزية
- القوس المقابل لها هو القوس $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$
- القوس أ جـ ب يسمى $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ الأكبر



قياس القوس

قياس القوس يساوى قياس الزاوية المركزية المقابلة له

ملاحظات



- قياس الدائرة كلها = ٣٦٠°
- قياس نصف الدائرة = ١٨٠°
- قياس ربع الدائرة = ٩٠°
- قياس خُمس الدائرة= $\frac{٣٦٠}{٥}$ =٧٢

مثال

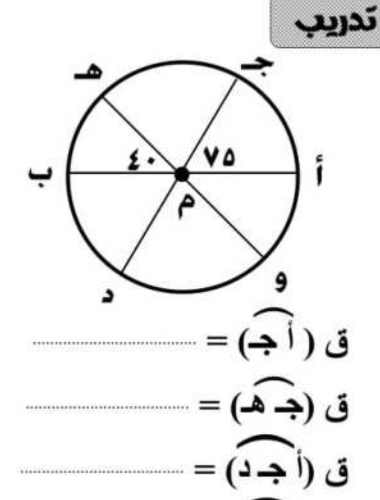
ق ($\overset{\frown}{\text{أ د}}$) = ٣٠° ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ب}}$) = ٩٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{د جـ}}$) = ٩٠ ـ ٣٠ = ٦٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{د جـ ب}}$) = ٦٠ + ٩٠ = ١٥٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب و}}$) = ١٨٠ + ٤٠ = ٢٢٠°

تدريب



ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ...

ق ($\overset{\frown}{\text{جـ هـ}}$) = ...

ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ د}}$) = ...

ق ($\overset{\frown}{\text{أ و هـ}}$) = ...

طول القوس

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

مثال

أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ الدائرة .

ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطرالدائرة ٧ سم .

الحل

قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ الدائرة = $\frac{٣٦٠}{٣}$ = ١٢٠°

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

= $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ١٤,٦ سم

تدريب

أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٦}$ الدائرة .

ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطرالدائرة ٧ سم .

الحل

....

....

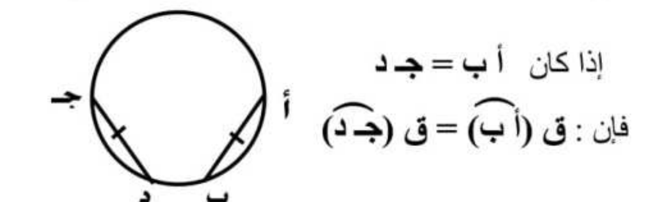
....

....

....

نتائج هامة

إذا كانت الأوتار متساوية فإن أقواسها تكون متساوية



إذا كان أ ب = جـ د

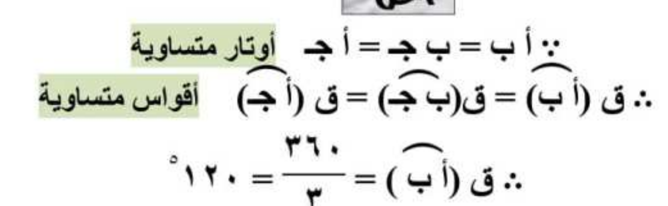
فإن : ق (أ ب⌒) = ق (جـ د⌒)

مثال

أ ب جـ Δ متساوى الأضلاع

أوجد ق (أ ب⌒)

الحل

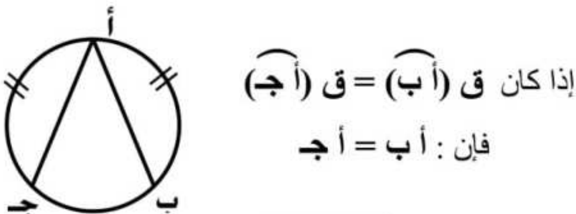


∵ أ ب = ب جـ = أ جـ — أوتار متساوية

∴ ق (أ ب⌒) = ق (ب جـ⌒) = ق (أ جـ⌒) — أقواس متساوية

$$\therefore \text{ق}(\overset{\frown}{\text{أ ب}}) = \frac{٣٦٠}{٣} = ١٢٠^\circ$$

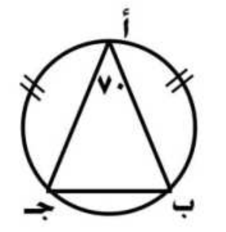
إذا كانت الأقواس متساوية فإن أوتارها تكون متساوية



إذا كان ق (أ ب⌒) = ق (أ جـ⌒)

فإن : أ ب = أ جـ

مثال



ق (أ ب⌒) = ق (أ جـ⌒)

ق (أ̂) = ٧٠

فأوجد ق (ب̂)

الحل

∵ ق (أ ب⌒) = ق (أ جـ⌒) — أقواس متساوية

∴ أ ب = أ جـ — أوتار متساوية

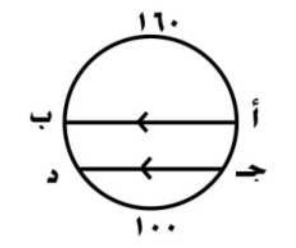
$$\therefore \text{ق}(\hat{\text{ب}}) = \text{ق}(\hat{\text{جـ}}) = \frac{١٨٠ - ٧٠}{٢} = \frac{١١٠}{٢} = ٥٥^\circ$$

الوتران المتوازيان يحصران قوسان متساويان

إذا كان أ ب // جـ د

فإن ق (أ جـ⌒) = ق (ب د⌒)

تدريب



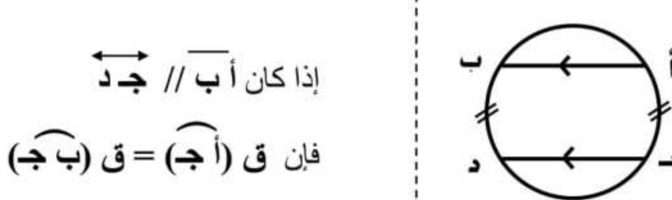
إذا كان أ ب // جـ د

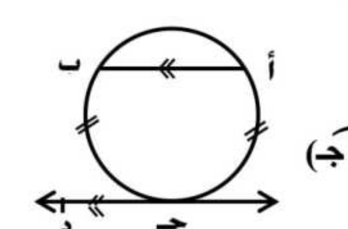
، ق (أ ب⌒) = ١٦٠°

ق (جـ د⌒) = ١٠٠°

فإن ق (أ جـ⌒) = ...

الوتر والمماس المتوازيان يحصران قوسان متساويان

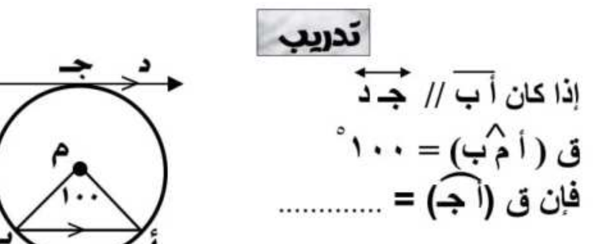




إذا كان أ ب // جـ د (مماس)

فإن ق (أ جـ⌒) = ق (ب جـ⌒)

تدريب



إذا كان أ ب // جـ د (مماس)

ق (أ م̂ ب) = ١٠٠°

فإن ق (أ جـ⌒) = ...

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة **الأقواس المتساوية في الطول متساوية في القياس**

[١]

أ ب قطر فى الدائرة م

ق (أ هـ^ جـ) = ٣٠°

ق (أ جـ⌒) = ٨٠°

أوجد ق (جـ د⌒)

الحل

العمل : نرسم م جـ ، م د

∵ ق(أ جـ⌒) = ٨٠° ∴ ق (أ م^ جـ) = ٨٠°

∵ أ م^ جـ زاوية خارجة عن Δ جـ م هـ

∴ ق (م جـ^ هـ) = ٨٠ − ٣٠ = ٥٠°

في Δ جـ م د : ∵ م جـ = م د (أنصاف أقطار)

∴ ق (جـ م^ د) = ١٨٠ − (٥٠ + ٥٠) = ٨٠°

∴ ق (جـ د⌒) = ٨٠°

[٢]

أ ب جـ د مستطيل مرسوم داخل دائرة

جـ هـ = جـ د

اثبت أن : أ هـ = ب جـ

الحل

∵ أ ب = د جـ خواص المستطيل

، هـ جـ = د جـ (معطى)

∴ أ ب = هـ جـ

∴ ق (أ ب⌒) = ق (هـ جـ⌒)

بإضافة ق (ب هـ⌒) للطرفين

∴ ق (أ هـ⌒) = ق (ب جـ⌒)

∴ أ هـ = ب جـ   هـ ط ث

[٣]

م دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم

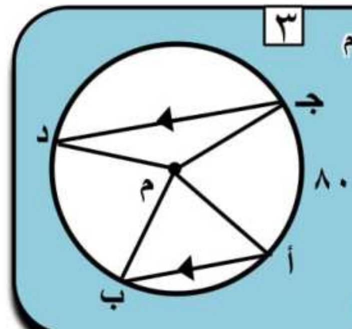
، أ ب ، جـ د وتران متوازيان

ق (أ جـ⌒) = ٨٠°

طول (أ جـ⌒) = طول (أ ب⌒)

أوجد : ١- ق (م أ^ ب)

٢- ق (جـ د⌒) ٣- طول (جـ د⌒)



الحل

∵ طول (أ جـ⌒) = طول (أ ب⌒)

∴ ق (أ جـ⌒) = ق (أ ب⌒) = ٨٠°

∴ ق (أ م^ ب) المركزية = ٨٠°

∵ م أ = م ب (أنصاف أقطار) ∴ Δ م أ ب متساوى الساقين

∴ ق (م أ^ ب) = ق (م ب^ أ) = ٥٠° المطلوب الأول

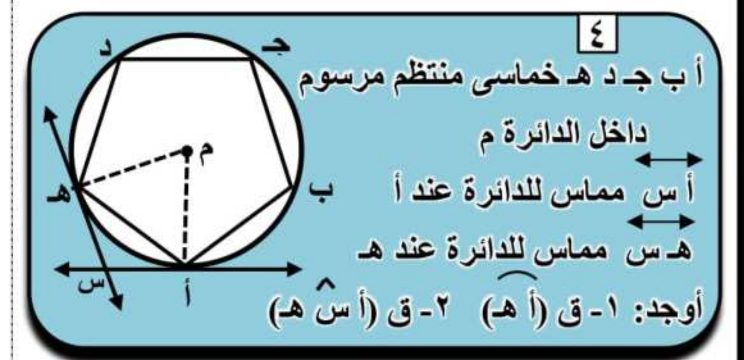
∵ أ ب // جـ د ∴ ق (أ جـ⌒) = ق (ب د⌒) = ٨٠°

∵ ق(جـ د⌒) + ق(أ جـ⌒) + ق(أ ب⌒) + ق(ب د⌒) = ٣٦٠°

∴ ق (جـ د⌒) = ٣٦٠ − (٨٠ + ٨٠ + ٨٠) = ١٢٠°

طول جـ د⌒ = $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × ٢ × ٣,١٤ × ١٥ = ٣١,٤ سم

[٤]



أ ب جـ د هـ خماسى منتظم مرسوم داخل الدائرة م

أ س↔ مماس للدائرة عند أ

هـ س↔ مماس للدائرة عند هـ

أوجد: ١- ق (أ هـ⌒) ٢- ق (أ س^ هـ)

الحل

العمل : نرسم م أ ، م هـ

∵ أ ب جـ د هـ خماسى منتظم

∴ أ ب = ب جـ = جـ د = د هـ = أ هـ

∴ ق(أ ب⌒) = ق(ب جـ⌒) = ق(جـ د⌒) = ق (د هـ⌒) = ق(أ هـ⌒)

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠° ∴ ق(أ هـ⌒) = $\frac{٣٦٠}{٥}$ = ٧٢° أولا

∵ ق(أ هـ⌒) = ٧٢° ∴ ق(أ م^ هـ) = ٧٢°

∵ أ س↔ مماس ∴ ق(م أ^ س) = ٩٠°

∵ هـ س↔ مماس ∴ ق(م هـ^ س) = ٩٠°

في الشكل الرباعى م أ س هـ :

ق(أ س^ هـ) = ٣٦٠ − (٧٢ + ٩٠ + ٩٠) = ١٠٨°

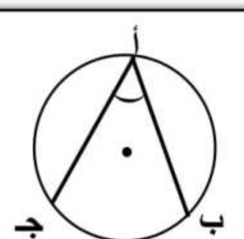


العلاقة بين المحيطية والمركزية

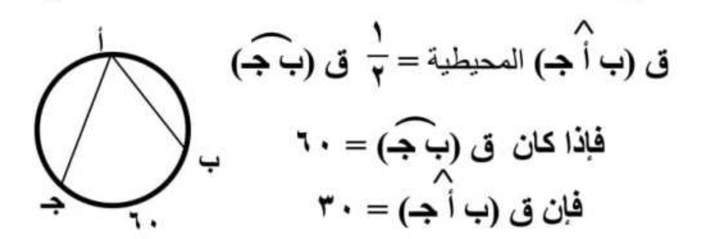
الزاوية المحيطية

هي زاوية رأسها على الدائرة ويحمل ضلعيها وتران

- ب أ جـ زاوية محيطية
- القوس المقابل لها هو $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$



قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس القوس المقابل لها



ق (ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$)

فإذا كان ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ٦٠

فإن ق (ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ٣٠



قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس المركزية المشتركة معها في القوس



∠ أ جـ ب المحيطية ، ∠ أ م ب المركزية

مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$

∴ ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (أ $\hat{\text{م}}$ ب)

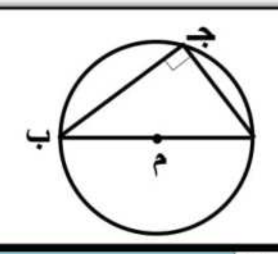
الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

مهم جدا — اوعى تنساها

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر

∴ ق ($\hat{\text{جـ}}$) المحيطية = ٩٠°

لأنها محيطية القوس المقابل لها نصف دائرة

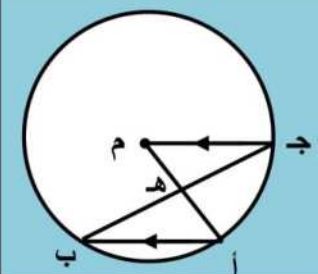


مثال ١

$\overline{\text{أ ب}}$ وتر فى الدائرة م

$\overline{\text{جـ م}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

اثبت أن : ب هـ > أ هـ



الحل

∵ ق ($\hat{\text{م}}$) = ٢ ق ($\hat{\text{ب}}$)

مركزية ومحيطية مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$

، ∵ $\overline{\text{جـ م}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق ($\hat{\text{م}}$) = ق ($\hat{\text{أ}}$) بالتبادل

في △ أ هـ ب : ∴ ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٢ ق ($\hat{\text{ب}}$)

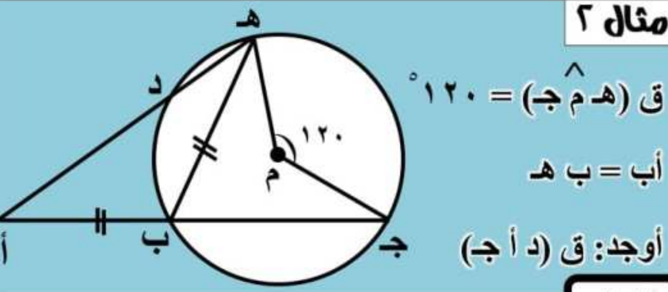
∴ ق ($\hat{\text{أ}}$) > ق ($\hat{\text{ب}}$) ∴ ب هـ > أ هـ

مثال ٢

ق (هـ $\hat{\text{م}}$ جـ) = ١٢٠°

أب = ب هـ

أوجد: ق (د أ جـ)



الحل

∵ ق (هـ $\hat{\text{ب}}$ جـ) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق ($\hat{\text{م}}$) المركزية

لأنهما مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$ ∴ ق (هـ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ٦٠°

∵ أ ب = ب هـ

∴ ق(ب $\hat{\text{هـ}}$ أ) = ق (هـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠°

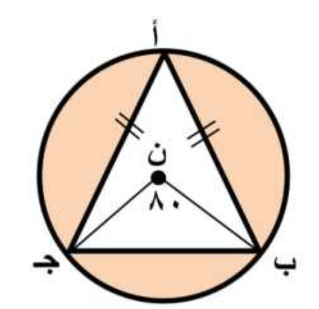


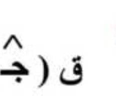
١ أ ب = أ جـ ،

ق(ب نَ جـ) = ٨٠°

أوجد: ١) ق(أ بَ جـ)

٢) ق (ب جـ) الأكبر

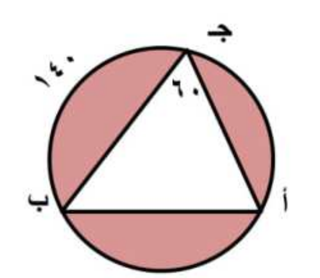




٢ ق (جَـ) = ٦٠°

ق (جـ ب) = ١٤٠°

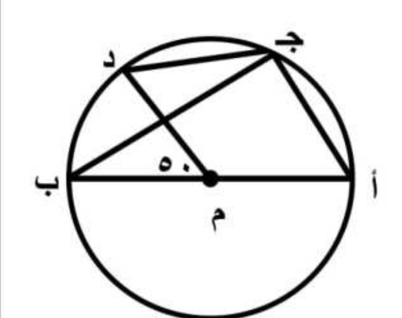
أوجد ق (أ جـ)



٣ أ ب قطر في الدائرة م

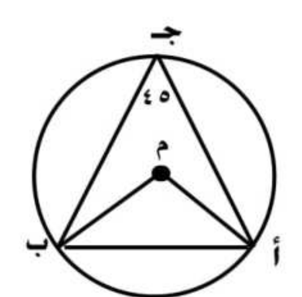
ق (د مَ ب) = ٥٠°

أوجد ق (أ جَـ د)



٤ ق (جَـ) = ٤٥°

أوجد ق (م أَ ب)



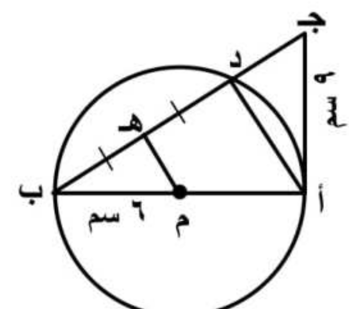
٥ أ ب قطر ، أ جـ مماس

هـ منتصف د ب

م ب = ٦ سم ، أ جـ = ٩ سم

أوجد طول كل من :

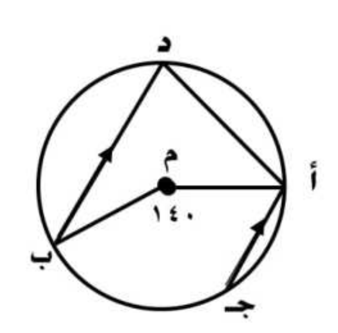
ب جـ ، أ د ، م هـ



٦ أ جـ // د ب

ق(أ مَ ب) = ١٤٠°

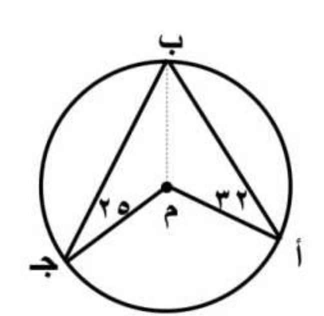
أوجد ق (جـ أَ د)



٧ ق (أَ) = ٣٢°

ق (جَـ) = ٢٥°

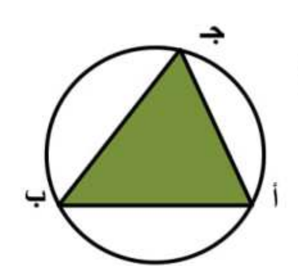
أوجد : ق (أ مَ جـ)



٨ ق(أ ب) : ق(ب جـ) : ق (أ جـ)

= ٤ : ٥ : ٣

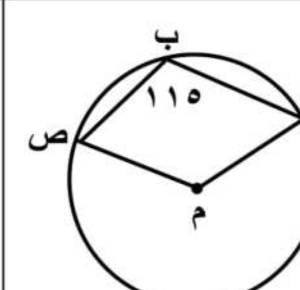
أوجد: ق(أ جَـ ب)



٩ ق (بَ) = ١١٥°

أوجد : ق (س مَ ص)

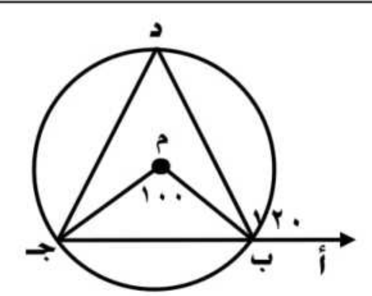
خد بالك : **ب محيطية تشترك معها في القوس زاوية مركزية وهى م المنعكسة**



١٠ ق (ب مَ جـ) = ١٠٠°

ق (أ بَ د) = ١٢٠°

أوجد ق (د جَـ ب)





إعداد / محمود عوض

تمارين مشهورة

تمرين مشهور ١

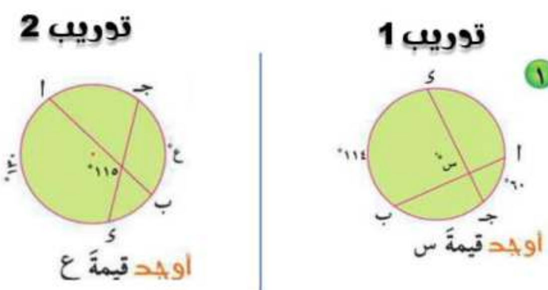
لو تقاطع وتران **داخل** دائرة

قياس زاوية التقاطع = نصف المجموع

ق (د هـ^ ب) = $\frac{1}{2}$ [ق (أ جـ⌒) + ق (د ب⌒)]

قياس القوس المجهول = ضعف الزاوية ـ المعلوم

ق (أ جـ⌒) = ٢ ق(د هـ^ ب) – ق (د ب⌒)



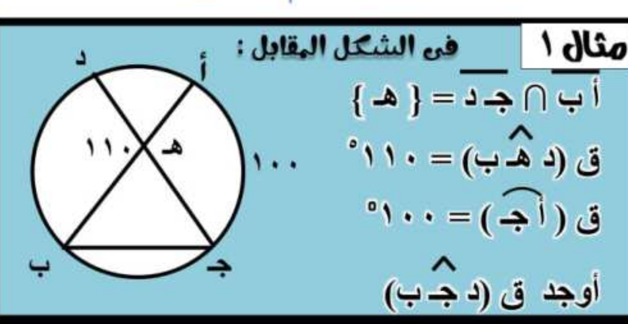
مثال ١ في الشكل المقابل :

أ ب ∩ جـ د = { هـ }

ق (د هـ^ ب) = ١١٠°

ق (أ جـ⌒) = ١٠٠°

أوجد ق (د جـ^ ب)



الحل

من تمرين مشهور ١ :

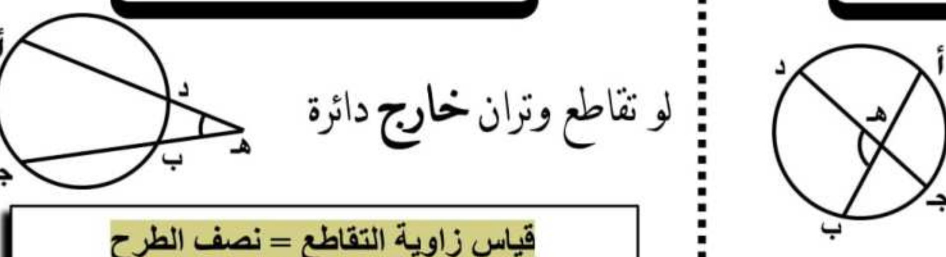
ق (د ب⌒) = ٢ ق (د هـ^ ب) – ق (أ جـ⌒)

= ٢ × ١١٠ – ١٠٠ = ١٢٠°

∵ ق (د جـ^ ب) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (د ب⌒)

∴ ق (د جـ^ ب) = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠°

تمرين مشهور ٢



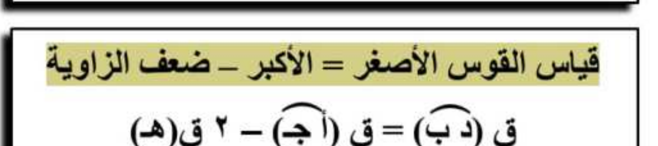
لو تقاطع وتران **خارج** دائرة

قياس زاوية التقاطع = نصف الطرح

ق (هـ^) = $\frac{1}{2}$ [ق (أ جـ⌒) – ق (د ب⌒)]

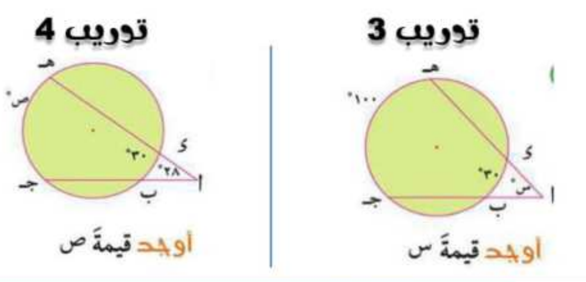
قياس القوس الأكبر = ضعف الزاوية + الأصغر

ق (أ جـ⌒) = ٢ ق(هـ^) + ق (د ب⌒)



قياس القوس الأصغر = الأكبر – ضعف الزاوية

ق (د ب⌒) = ق (أ جـ⌒) – ٢ ق(هـ)



مثال ٢ في الشكل المقابل :

ق (أ^) = ٣٠°، ق (ب د⌒) = ٤٤°

ق (د جـ^ هـ) = ٤٨°

أوجد : ١- ق (هـ جـ⌒)

٢- ق (ب جـ⌒)

الحل

من تمرين مشهور ٢ :

ق(هـ جـ⌒) = ٢ ق(أ^) + ق (د ب⌒)

∴ ق (هـ جـ⌒) = ٢ × ٣٠ + ٤٤ = ١٠٤° **أولا**

∵ ق (د جـ^ هـ) المحيطية = ٤٨°

∴ ق(د هـ⌒) = ٤٨×٢ = ٩٦°

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠

∴ ق (ب جـ⌒) = ٣٦٠ – (٤٤ + ١٠٤ + ٩٦) = ١١٦°

تدريبات على تمرين مشهور ١ ، ٢

١ في الشكل المقابل :

ق (أ̂) = ٣٥°

ق (أ هـ̂ د) = ١١٥°

أوجد : ق (أ د⌢)

الحل

....

....

....

....

....

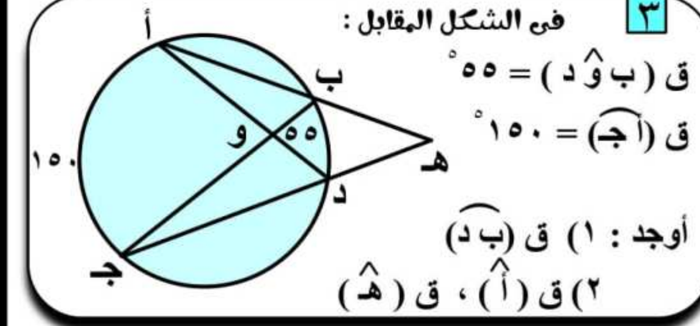
....

....

....

....

٣ في الشكل المقابل :



ق (ب و̂ د) = ٥٥°

ق (أ جـ⌢) = ١٥٠°



أوجد : ١) ق (ب د⌢)

٢) ق (أ̂) ، ق (هـ̂)

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

٢ في الشكل المقابل :

ق (أ̂) = ٤٠°

ق (ب جـ⌢) = ق (د هـ⌢)

أوجد : ١) ق (جـ هـ⌢)

٢) ق (ب جـ⌢)

الحل



....

....

....

....

....

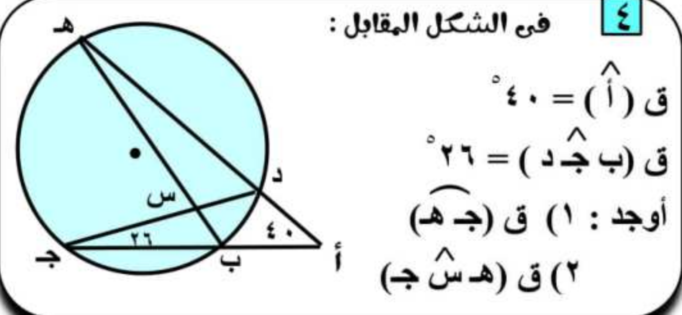
....

....

....

....

٤ في الشكل المقابل :



ق (أ̂) = ٤٠°

ق (ب جـ̂ د) = ٢٦°

أوجد : ١) ق (جـ هـ⌢)

٢) ق (هـ س̂ جـ)

الحل

....

....

....

....

....

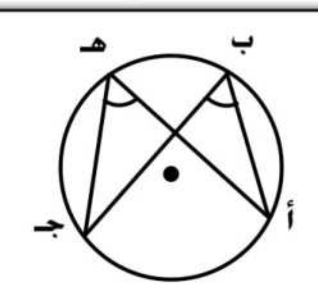
....

....

....

الزوايا المحيطية المشتركة في القوس

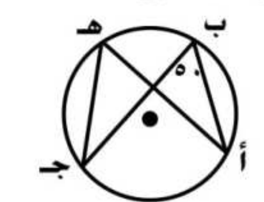
الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس متساوية في القياس

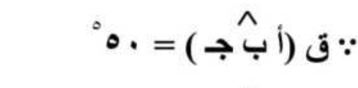


ق (ب̂) = ق (هـ̂)
محيطيتان مشتركتان فى القوس أ جـ

كذلك: ق (أ̂) = ق (جـ̂)
محيطيتان مشتركتان فى القوس ب هـ

فمثلا : في الشكل المقابل :



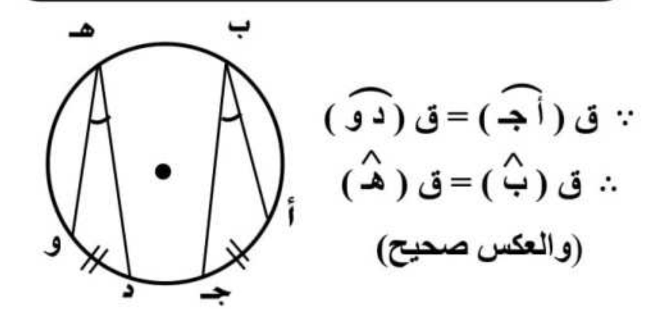


∵ ق (أ ب̂ جـ) = ٥٠°

∴ ق(أ هـ̂ جـ) = ...

السبب: ....

الزوايا المحيطية التي أقواسها متساوية تكون متساوية في القياس

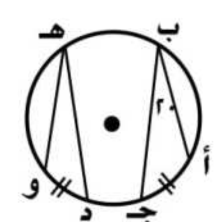


∵ ق (أ جـ⌒) = ق (د و⌒)

∴ ق (ب̂) = ق (هـ̂)

(والعكس صحيح)

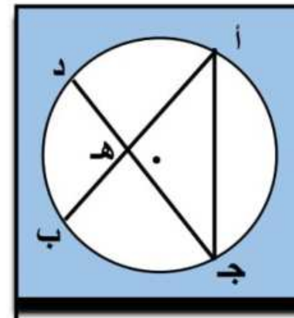
فمثلا : في الشكل المقابل :



∵ ق (أ ب̂ جـ) = ٢٠°

∴ ق(د هـ̂ و) = ...

السبب: ....



مثال ١ فى الشكل المقابل :

أ ب ، جـ د وتران متساويان فى الطول

اثبت أن :

Δ أ جـ هـ متساوى الساقين

الحل

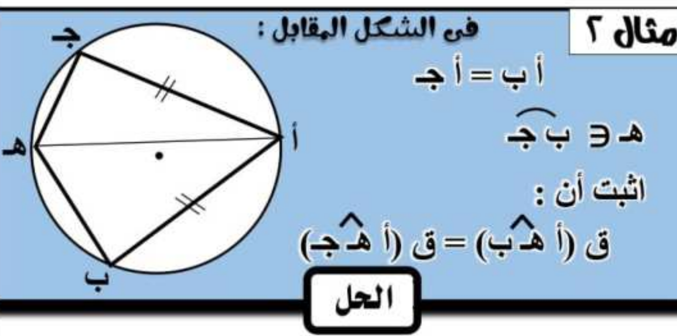
∵ أ ب = جـ د ∴ ق (أ ب⌒) = ق(جـ د⌒)

<u>بطرح ق (د ب⌒) من الطرفين</u>

∴ ق (أ د⌒) = ق (ب جـ⌒)

∴ ق (جـ̂) = ق (أ̂)

∴ Δ أ جـ هـ متساوى الساقين



مثال ٢ فى الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ

هـ ∈ ب جـ⌒

اثبت أن :

ق (أ هـ̂ ب) = ق (أ هـ̂ جـ)

الحل

∵ أ ب = أ جـ أوتار متساوية

∴ ق (أ ب⌒) = ق (أ جـ⌒) أقواس متساوية

∴ ق (أ هـ̂ ب) = ق (أ هـ̂ جـ)

هـ ط ث

<u>القاعدة الأولى</u>: إذا كانت الأوتار متساوية فإن الأقواس متساوية

<u>القاعدة الثانية</u>: إذا كانت الأقواس متساوية فإن الزوايا المحيطية المرسومة عليها متساوية

١ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

د هـ // ب جـ

اثبت أن:

ق (د أ^ جـ) = ق (ب أ^ هـ)

الحل

∵ د هـ // ب جـ ∴ ق (د ب⌒) = ق (هـ جـ⌒)

∴ ق(د أ^ ب) المحيطية = ق (هـ أ^ جـ) المحيطية

لأنهما محيطيتان أقواسهما متساوية

وبإضافة ق (ب أ^ جـ) للطرفين

∴ ق (د أ^ جـ) = ق (ب أ^ هـ) هـ ط ث

٢ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة

أ د = د هـ

اثبت أن :

Δ أ د هـ متساوى الأضلاع

الحل

∵ Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع

∴ ق(ب^) = ٦٠°

∴ ق(د^) = ق (ب^) = ٦٠° محيطيتان مشتركتان في أ جـ⌒

∵ Δ أ د هـ متساوى الساقين

∴ ق (د أ^ هـ) = ق (د هـ^ أ) = ٦٠°

∴ Δ أ د هـ متساوى الأضلاع

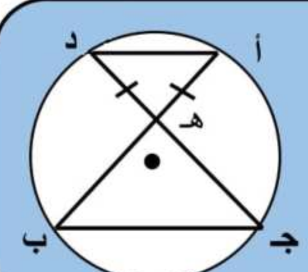
هـ ط ث

٣ في الشكل المقابل :

أ ب ∩ جـ د = { هـ }

هـ أ = هـ د

اثبت أن : هـ ب = هـ جـ



∵ هـ أ = هـ د ∴ ق (أ^) = ق (د^)

، ∵ ق(أ^) = ق (جـ^) محيطيتان مشتركتان في د ب⌒

، ق (د^) = ق (ب^) محيطيتان مشتركتان في أ جـ⌒

∴ ق (جـ^) = ق (ب^)

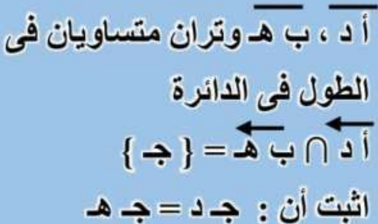
∴ Δ هـ جـ ب متساوى الساقين ∴ هـ ب = هـ جـ

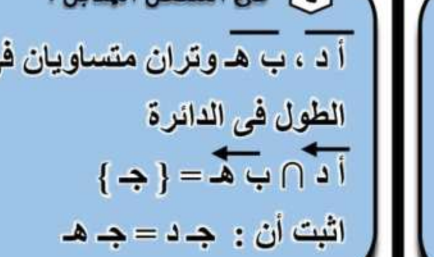
٤ في الشكل المقابل :

أ د ، ب هـ وتران متساويان في الطول في الدائرة

أ د ∩ ب هـ = { جـ }

اثبت أن : جـ د = جـ هـ





∵ أ د = ب هـ ∴ ق (أ د⌒) = ق (ب هـ⌒)

و بإضافة ق (د هـ⌒) للطرفين

∴ ق (أ هـ⌒) = ق (ب د⌒)

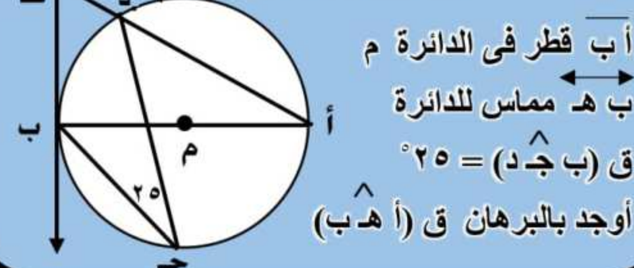
∴ ق (ب^) = ق (أ^) ∴ جـ أ = جـ ب

في Δ جـ أ ب :

∵ جـ أ = جـ ب ، د أ = هـ ب

بالطرح ينتج أن : جـ د = جـ هـ

٥



في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م

$\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ مماس للدائرة

ق (ب $\hat{\text{جـ}}$ د) = ٢٥°

أوجد بالبرهان ق (أ $\hat{\text{هـ}}$ ب)

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ مماس ، $\overline{\text{أ ب}}$ قطر

∴ ق (هـ $\hat{\text{ب}}$ أ) = ٩٠°

∵ ق ($\hat{\text{أ}}$) = ق ($\hat{\text{جـ}}$) محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{د ب}}$

∴ ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٢٥°

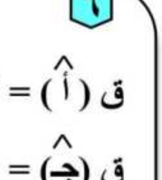
<u>في △ هـ ب أ</u> :

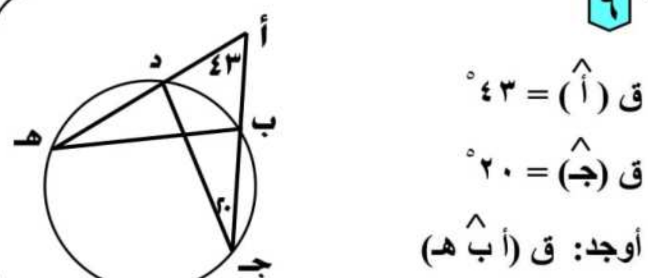
ق (أ $\hat{\text{هـ}}$ ب) = ١٨٠ − (٩٠ + ٢٥) = ٦٥°

٦









ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٤٣°

ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٢٠°

أوجد: ق (أ $\hat{\text{ب}}$ هـ)

الحل



....

٧



أ ب جـ △ فيه

أ ب = أ جـ

اثبت أن :

ق ($\overset{\frown}{\text{د ب}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{هـ جـ}}$)

الحل

....

٨

اثبت أن :

ق (هـ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ق (و $\hat{\text{ب}}$ د)

الحل

....

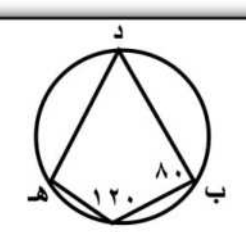
الشكل الرباعى الدائرى

إعداد / محمود عوض

الشكل الرباعى الدائرى : هو شكل رباعى تنتمى رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة .
أي يمكن رسم دائرة واحدة تمر برؤوسه الأربعة

لو عرفت ان الشكل رباعى دائرى (سواء هو قالك في المسألة أو لقيت رؤوسه الأربعة تقع على الدائرة) استنتج ٣ حاجات :

كل زاويتان متقابلتان مجموعهما = ١٨٠°



∵ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

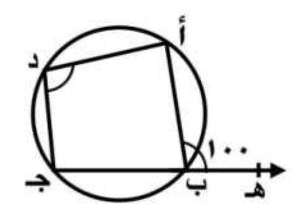
∴ ق ($\hat{ب}$) + ق ($\hat{هـ}$) = ١٨٠°

، ق ($\hat{د}$) + ق ($\hat{جـ}$) = ١٨٠°

∴ ق ($\hat{د}$) = ١٨٠ – ١٢٠ = ٦٠°

ق ($\hat{هـ}$) = ١٨٠ – ٨٠ = ١٠٠°

قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

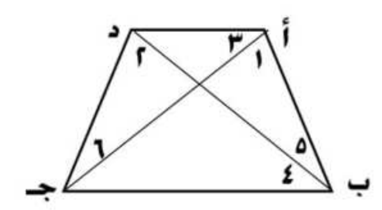


∵ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق (أ $\hat{ب}$ هـ) الخارجة = ق ($\hat{د}$)

∴ ق ($\hat{د}$) = ١٠٠°

أي زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها متساويتان



إذا كان أ ب جـ د رباعى دائرىفإن:

ق($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) مرسومتان على ب جـ

ق($\hat{٣}$) = ق ($\hat{٤}$) مرسومتان على د جـ

ق($\hat{٥}$) = ق ($\hat{٦}$) مرسومتان على أ د

مثال ١ في الشكل المقابل :

أ ب جـ د شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، ق ($\hat{جـ}$) = ٧٠° ،

ق (أ $\hat{د}$ ب) = ٣٠°

أوجد : ق (أ $\hat{ب}$ د)

الحل

∵ أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق ($\hat{أ}$) + ق ($\hat{جـ}$) = ١٨٠°

∴ ق ($\hat{أ}$) = ١٨٠ – ٧٠ = ١١٠°

في Δ أ ب د :

ق (أ $\hat{ب}$ د) = ١٨٠ – (١١٠ + ٣٠) = ٤٠°

مثال ٢ في الشكل المقابل :

هـ ∈ أ ب

ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ١١٠°

ق (جـ ب هـ) = ٨٥°

أوجد ق (ب $\hat{د}$ جـ)

الحل

∵ ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ١١٠°

∴ ق (ب $\hat{د}$ أ) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

∵ جـ $\hat{ب}$ هـ خارجة عن الرباعى الدائرى أ ب جـ د

∴ ق (جـ $\hat{د}$ أ) = ق (جـ $\hat{ب}$ هـ) = ٨٥°

∴ ق (ب $\hat{د}$ جـ) = ق (جـ $\hat{د}$ أ) – ق (ب $\hat{د}$ أ)

= ٨٥ – ٥٥ = ٣٠°

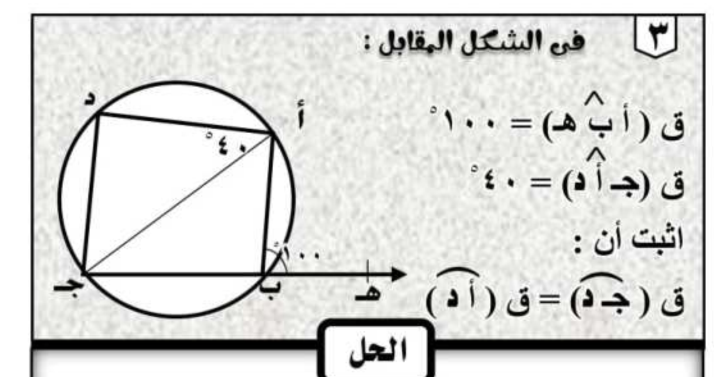
٣ في الشكل المقابل :

ق (أ ب̂ هـ) = ١٠٠°

ق (جـ أ̂ د) = ٤٠°

اثبت أن :

ق (جـ د⌒) = ق (أ د⌒)



الحل

∵ أ ب̂ هـ زاوية خارجة عن الرباعى الدائرى أ ب جـ د

∴ ق (د̂) = ق (أ ب̂ هـ) = ١٠٠°

في ∆ أ د جـ :

ق (أ جـ̂ د) = ١٨٠ – (١٠٠ + ٤٠) = ٤٠°

∵ ق(د أ̂ جـ) = ق (أ جـ̂ د) = ٤٠

∴ أ د = د جـ

∴ ق(جـ د⌒) = ق (أ د⌒)

هـ ط ث

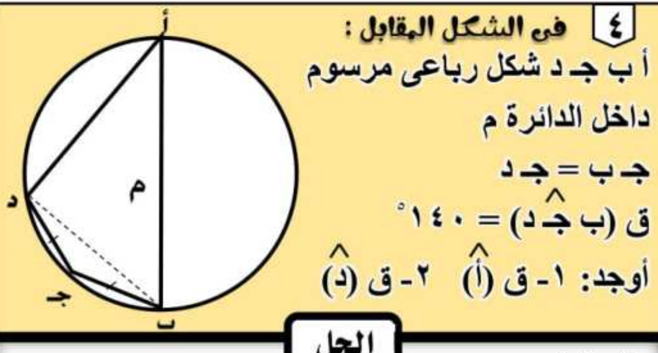
٤ في الشكل المقابل :

أ ب جـ د شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة م

جـ ب = جـ د

ق (ب جـ̂ د) = ١٤٠°

أوجد: ١- ق (أ̂) ٢- ق (د̂)



الحل

العمل نرسم ب د

∵ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق (أ̂) + ق (جـ̂) = ١٨٠°

∴ ق (أ̂) = ١٨٠ – ١٤٠ = ٤٠° **المطلوب الأول**

في ∆ جـ ب د :

∵ جـ ب = جـ د ∴ ق(جـ د̂ ب) = ق (جـ ب̂ د)

∴ ق (جـ د̂ ب) = $\frac{١٨٠ - ١٤٠}{٢}$ = ٢٠°

∵ ق (أ د̂ ب) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

∴ ق(د̂) = ٩٠ + ٢٠ = ١١٠°

٥ في الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م

ق (أ جـ̂ د) = ١١٥°

أوجد بالبرهان : ق (د أ̂ ب)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

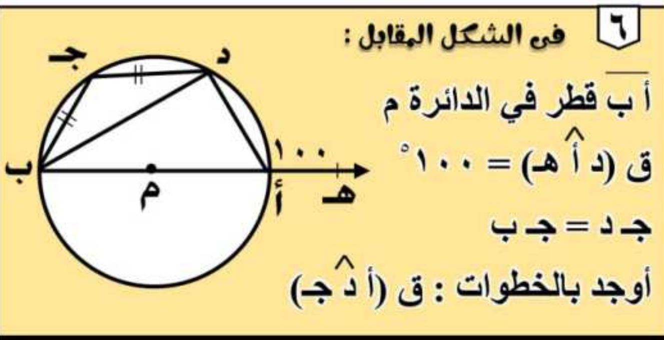
٦ في الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م

ق (د أ̂ هـ) = ١٠٠°

جـ د = جـ ب

أوجد بالخطوات : ق (أ د̂ جـ)



....

....

....

....

....

....

....

....

....



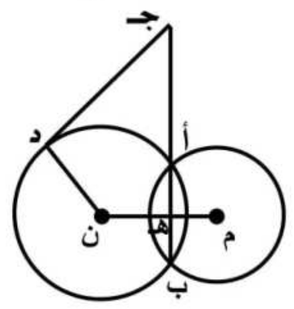
إثبات أن الشكل رباعى دائرى

لو قالك اثبت أن الشكل رباعى دائرى إبحث عن إحدى الحالات الثلاثة الآتية واثبتها :

زاويتان متقابلتان واثبت أن : مجموعهما = ١٨٠

مثال لذيذ

في الشكل المقابل عايزين نثبت أن : جـ هـ ن د رباعى دائرى



طريقة الحل

في الشكل جـ هـ ن د

ق ($\hat{د}$) = ٩٠° عشان المماس

ق ($\hat{هـ}$) = ٩٠° عشان الوتر المشترك

و الزاويتين د ، هـ متقابلتين

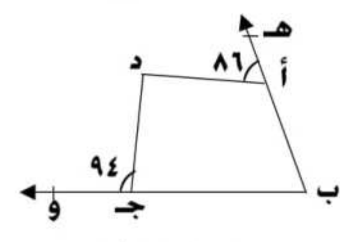
ولو جمعناهم = ١٨٠°

∴ الشكل رباعى دائرى

زاوية خارجة قياسها = قياس المقابلة للمجاورة

مثال لذيذ

في الشكل المقابل عايزين نثبت أن : أ ب جـ د رباعى دائرى



طريقة الحل

شايف الزاوية ٩٤ ؟

هي واللى جنبها زاوية مستقيمة

∴ق (د $\hat{جـ}$ ب) =١٨٠ـ ٩٤ =٨٦

كده ظهر لينا زاويتين متساويتين

الخارجة = المقابلة للمجاورة

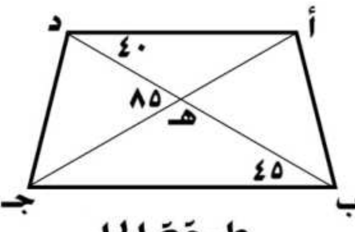
وهما ق(هـ $\hat{أ}$ د) = ق(د $\hat{جـ}$ ب)

∴ الشكل رباعى دائرى

زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة ومتساويتان

مثال لذيذ

في الشكل المقابل عايزين نثبت أن : أ ب جـ د رباعى دائرى



طريقة الحل

شايف الزاوية ٨٥ ؟

دى خارجة عن $\triangle$ هـ ب جـ

∴ق (هـ $\hat{جـ}$ ب) =٨٥ـ ٤٥ = ٤٠°

كده ظهر لينا زاويتين متساويتين

ومرسومتين على قاعدة واحدة

وهما ق(أ $\hat{د}$ ب) = ق(أ $\hat{جـ}$ ب)

∴ الشكل رباعى دائرى

سؤال مهم :

اذكر ٣ حالات يكون فيها الشكل الرباعى دائرياً ؟

الإجابة :

١- إذا وجد زاويتان متقابلتان متكاملتان

٢- إذا وجد زاوية خارجة قياسها = المقابلة للمجاورة

٣- إذا وجد زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها ومتساويتان

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

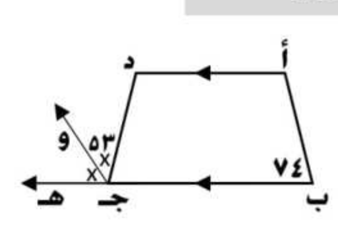
$\overline{أ د}$ // $\overline{ب جـ}$

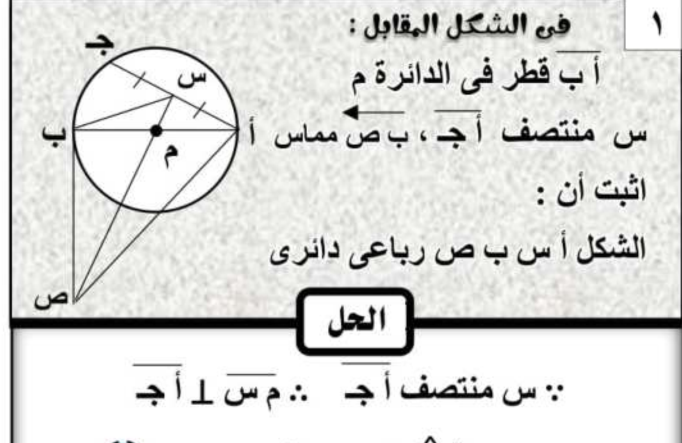
جـ و ينصف د $\hat{جـ}$ هـ

ق (د $\hat{جـ}$ و) =٥٣°

ق($\hat{ب}$) = ٧٤°

اثبت أن:أ ب جـ د رباعى دائرى





١ في الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م

س منتصف أ جـ ، ب ص مماس

اثبت أن :

الشكل أ س ب ص رباعى دائرى

الحل

∵ س منتصف أ جـ ∴ م س ⊥ أ جـ

∴ ق (أ س^ م) = ٩٠° ← (١)

∵ ب ص مماس ، أ ب قطر ∴ أ ب ⊥ ب ص

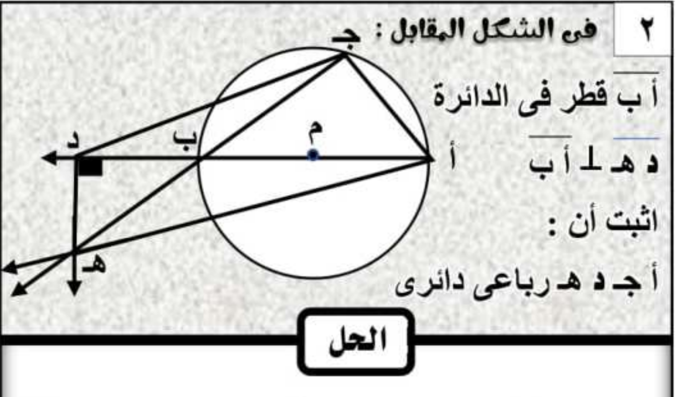
∴ ق (م ب^ ص) = ٩٠° ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (أ س^ ص) = ق (أ ب^ ص)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهى أ ص وفى جهة واحدة منها

∴ أ س ب ص رباعى دائرى



٢ في الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة

د هـ ⊥ أ ب

اثبت أن :

أ جـ د هـ رباعى دائرى

الحل

∵ د هـ ⊥ أ د ∴ ق (أ د^ هـ) = ٩٠° ← (١)

∵ أ جـ^ ب محيطية مرسومة في نصف دائرة

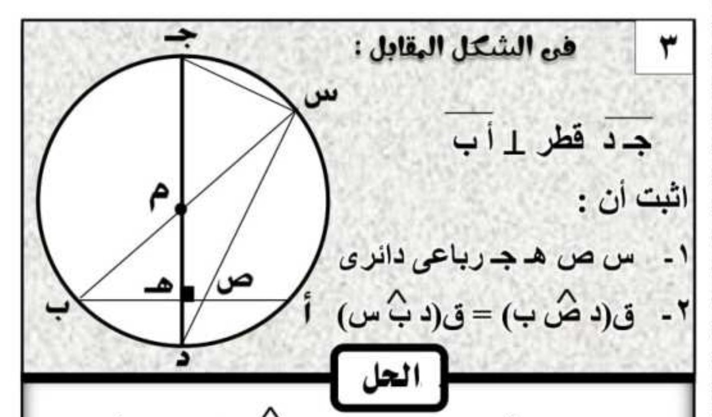
∴ ق (أ جـ^ ب) = ٩٠° ← (٢)

من ١ ، ٢ نلاحظ: ق (أ د^ هـ) = ق (أ جـ^ هـ)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهى أ هـ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ جـ د هـ رباعى دائرى





٣ في الشكل المقابل :

جـ د قطر ⊥ أ ب

اثبت أن :

١- س ص هـ جـ رباعى دائرى

٢- ق(د ص^ ب) = ق(د ب^ س)

الحل

∵ جـ د ⊥ أ ب ∴ ق (جـ هـ^ ص) = ٩٠°

∵ ق (جـ س^ د) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

∵ ق (جـ هـ^ ص) + ق (جـ س^ د) = ١٨٠° (متقابلتان متكاملتان)

∴ س ص هـ جـ رباعى دائرى **المطلوب الأول**

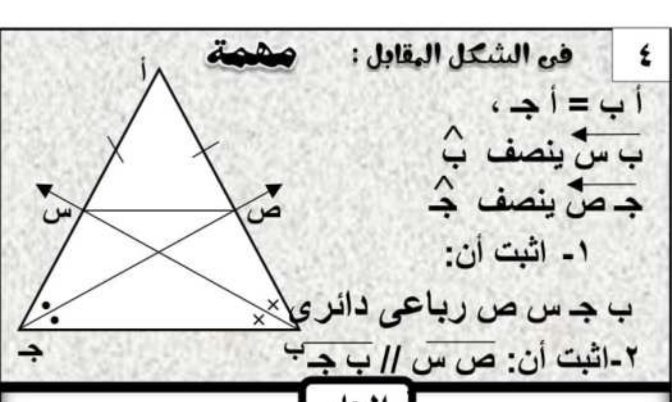
∵ ق (د ص^ ب) = ق (جـ^) ← (١)

لأن قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

∵ ق(د ب^ س) = ق (جـ^) ← (٢)

لأنهما محيطيتان مشتركتان في س د

من ١ ، ٢ ينتج أن : ق(د ص^ ب) = ق (د ب^ س)



٤ في الشكل المقابل : مهمة

أ ب = أ جـ ،

ب س ينصف ب^

جـ ص ينصف جـ^

١- اثبت أن:

ب جـ س ص رباعى دائرى

٢-اثبت أن: ص س // ب جـ

الحل

∵ أ ب = أ جـ ∴ ق (ب^) = ق (جـ^)

∴ $\frac{1}{2}$ ق (ب^) = $\frac{1}{2}$ ق (جـ^)

∴ ق (ص ب^ س) = ق (ص جـ^ س)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة

∴ ب جـ س ص رباعى دائرى **المطلوب الأول**

∵ ب جـ س ص رباعى دائرى

∴ ق(أ ص^ س) الخارجة = ق(جـ^) المقابلة للمجاورة

∴ ق (أ ص^ س) = ق (ب^) وهما في وضع تناظر

∴ ص س // ب جـ

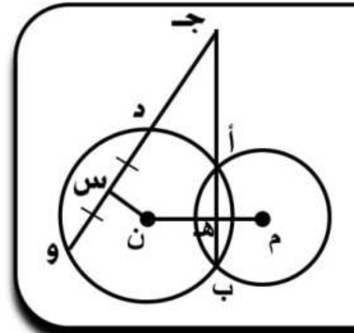


م ، دائرتان متقاطعتان

س منتصف $\overline{د و}$

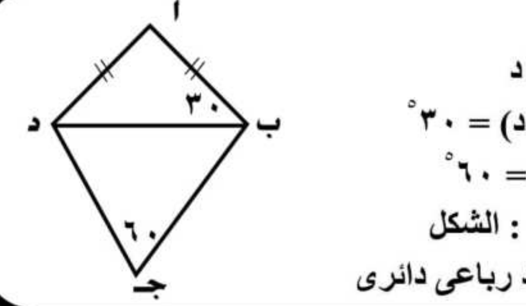
اثبت أن :الشكل

جـ هـ ن س رباعى دائرى



الحل

....



٢

أ ب = أ د

ق (أ $\hat{ب}$ د) = ٣٠°

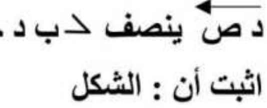
ق ($\hat{جـ}$) = ٦٠°

اثبت أن : الشكل

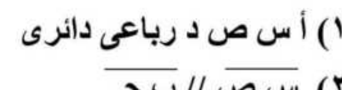
أ ب جـ د رباعى دائرى

الحل

....



$\overrightarrow{أ س}$ ينصف ∠ ب أ جـ

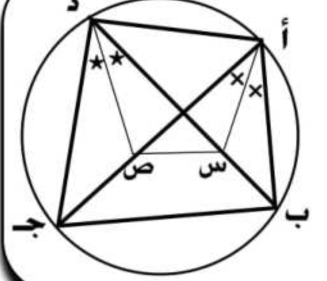


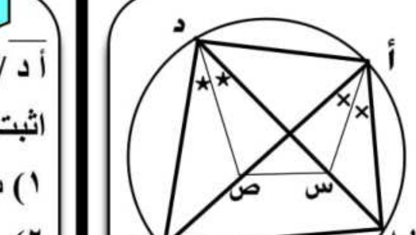
$\overrightarrow{د ص}$ ينصف ∠ب د جـ

اثبت أن : الشكل

١) أ س ص د رباعى دائرى

٢) $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$





الحل

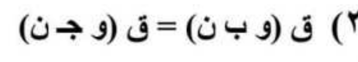
....



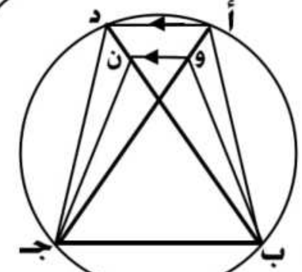
$\overline{أ د}$ // $\overline{و ن}$

اثبت أن :

١) ب و ن جـ رباعى دائرى



٢) ق (و ب ن) = ق (و جـ ن)



الحل

....

تمارين على الرباعى الدائرى

(١) فى الشكل المقابل :

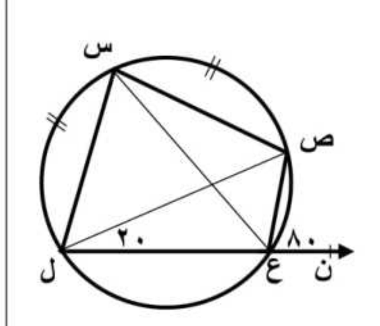
س منتصف $\overset{\frown}{\text{ص ل}}$

ق (ص $\hat{\text{ع}}$ ن) = ٨٠

ق(ص $\hat{\text{ل}}$ ع) = ٢٠

أوجد : ١) ق (ع $\hat{\text{س}}$ ل)

٢) ق $(\overset{\frown}{\text{س ص ع}})$



(٢) فى الشكل المقابل :



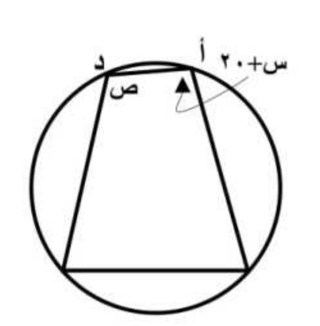
ق ($\hat{\text{ب}}$) = ٧٠°

ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٨٠°

ق ($\hat{\text{د}}$) = ص

ق ($\hat{\text{أ}}$) = س + ٢٠

أوجد قيمتى س ، ص

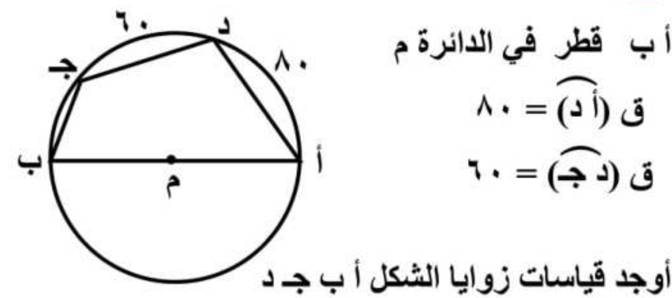


(٣) فى الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م

ق $(\overset{\frown}{\text{أ د}})$ = ٨٠

ق $(\overset{\frown}{\text{د جـ}})$ = ٦٠



أوجد قياسات زوايا الشكل أ ب جـ د

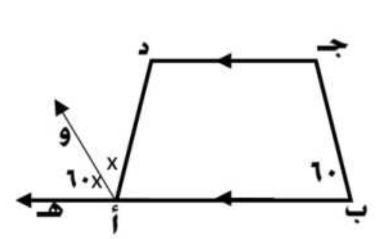
(٤) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{جـ د}}$ // $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$

$\overleftarrow{\text{أ و}}$ ينصف ∠ د أ هـ

ق (و $\hat{\text{أ}}$ هـ) = ٦٠°

ق($\hat{\text{ب}}$) = ٦٠°



اثبت أن: الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

(٥) فى الشكل المقابل :

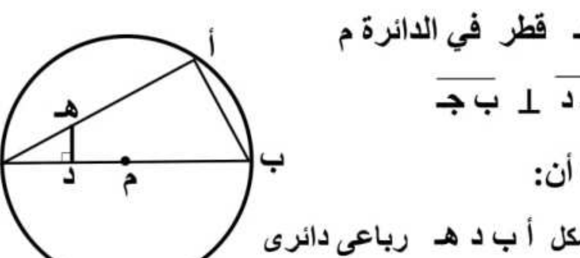
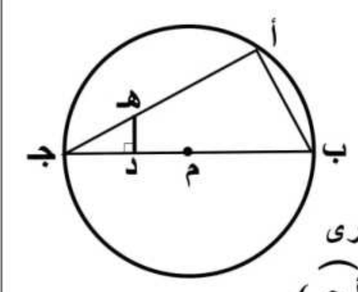
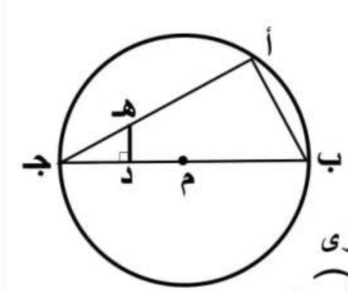
ب جـ قطر في الدائرة م

$\overline{\text{هـ د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

اثبت أن:

١) الشكل أ ب د هـ رباعى دائرى

٢) ق (د $\hat{\text{هـ}}$ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق $(\overset{\frown}{\text{أ جـ}})$

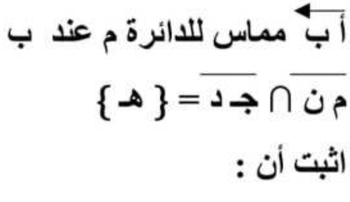




(٦) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان في جـ ، د

$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند ب

م ن ∩ $\overline{\text{جـ د}}$ = { هـ }



اثبت أن :

الشكل أ ب م هـ رباعى دائرى

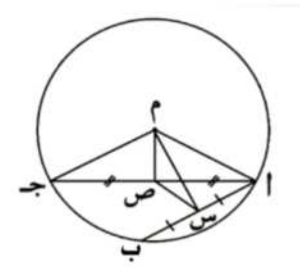
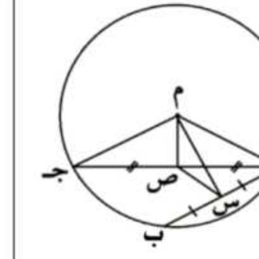
(٧) فى الشكل المقابل :

س ، ص منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$

على الترتيب

اثبت أن :

أ س ص م رباعى دائرى

(٨) فى الشكل المقابل :

أ د = أ ب

ق (أ $\hat{\text{ب}}$ د) = ٣٠

ق (د $\hat{\text{جـ}}$ هـ) = ١٢٠

اثبت أن : الشكل

أ ب جـ د رباعى دائرى

(٩) فى الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م

د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

$\overleftarrow{\text{ب و}}$ مماس

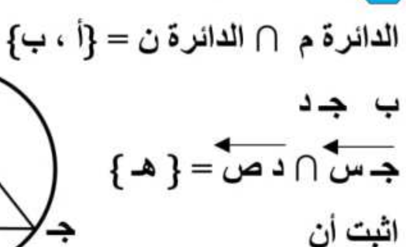
اثبت أن: ١) م ب و د رباعى دائرى

٢) ق ($\hat{\text{و}}$) = ٢ ق ($\hat{\text{هـ}}$)

(١٠) فى الشكل المقابل :

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}

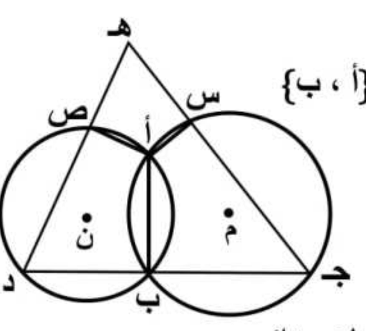
ب ∈ جـ د



$\overleftarrow{\text{جـ س}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{د ص}}$ = { هـ }

اثبت أن

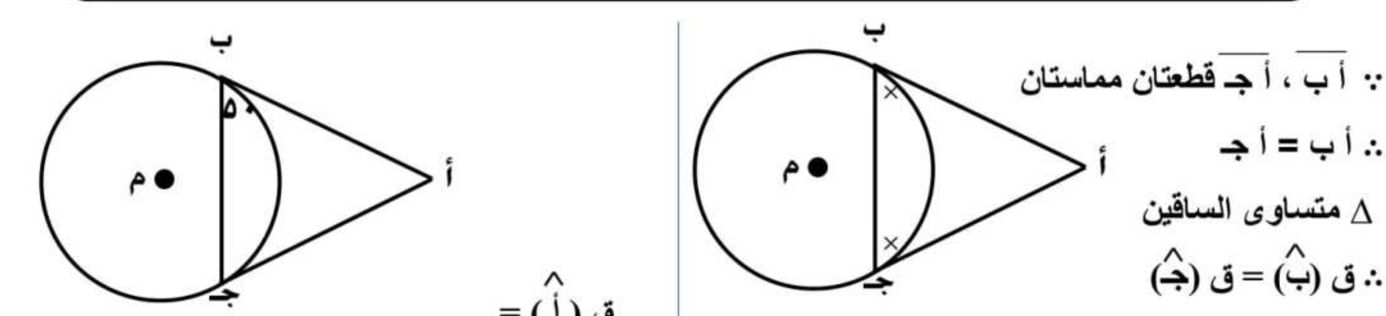
الشكل أ س هـ ص رباعى دائرى





العلاقة بين مماسات الدائرة

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان في الطول.



∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان

∴ أب = أجـ

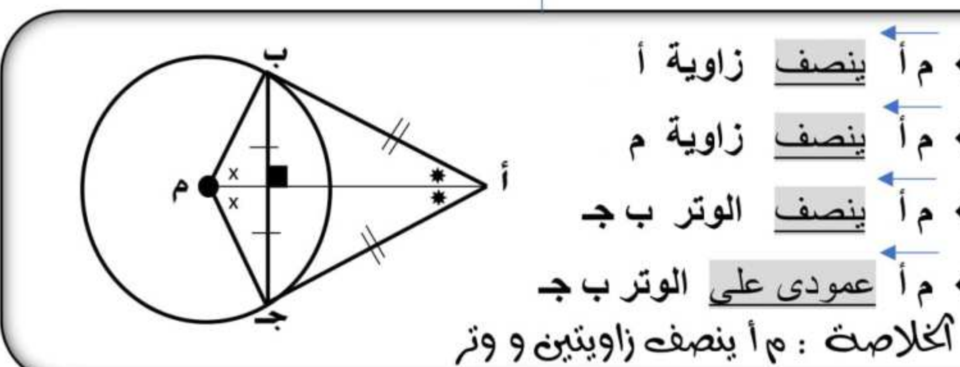
Δ متساوى الساقين

∴ ق (ب̂) = ق (جـ̂)

ق (أ̂) = ...

نتائج هامة





- م أ ينصف زاوية أ
- م أ ينصف زاوية م
- م أ ينصف الوتر ب جـ
- م أ عمودى على الوتر ب جـ

الخلاصة : م أ ينصف زاويتين و وتر

مثال ١

أب ، أجـ قطعتان مماستان

ق (ب أ̂ جـ) = ٢٥°

أوجد : ق (ب م̂ جـ)

الحل

∵ أب مماسة ، ب م نصف قطر ∴ ق (أ ب̂ م) = ٩٠°

في Δ أ ب م :

ق (أ م ب̂) = ١٨٠ − (٣٥+٩٠) = ٥٥°

∵ م أ ينصف ∠ ب م جـ

∴ ق (ب م̂ جـ) = ٥٥ × ٢ = ١١٠°

مثال ٢

Δ أ ب جـ يمس الدائرة

من الخارج في س ، ص ، ع

أ س = ٥سم ، ب ص = ٤سم

جـ ع = ٣ سم

أوجد محيط Δ أ ب جـ

الحل

أ س = أ ع = ٥ سم قطعتان مماستان

ب ص = ب س = ٤ سم قطعتان مماستان

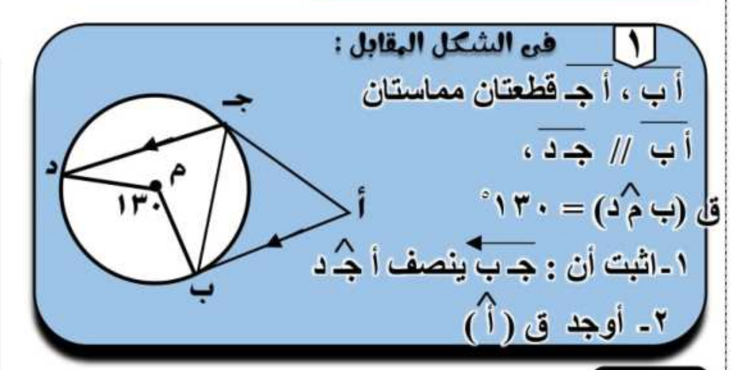
جـ ع = جـ ص = ٣٥ سم قطعتان مماستان

أ ب = ٥ + ٤ = ٩ سم ، ب جـ = ٤ + ٣ = ٧ سم

أ جـ = ٥ + ٣ = ٨ سم **المحيط** = ٩ + ٧ + ٨ = ٢٤ سم

عدد المماسات المشتركة

- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين ٤
- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج ٣
- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين ٢
- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل ١
- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متحدتا المركز صفر
- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتان صفر



١ **في الشكل المقابل :**

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

أ ب // جـ د ،

ق (ب م̂ د) = ١٣٠°

١- اثبت أن : جـ ب ينصف أ جـ̂ د

٢- أوجد ق (أ̂)

الحل

∵ ق (ب جـ̂ د) المحيطية = ½ ق (م̂) المركزية

∴ ق(ب جـ̂ د) = ٦٥°

∵ أ ب // جـ د

∴ ق (أ ب̂ جـ) = ق (ب جـ̂ د) = ٦٥° بالتبادل ← (١)

∵ أ ب = ب جـ (قطعتان مماستان)

∴ ق (أ ب̂ جـ) = ق (أ جـ̂ ب) = ٦٥° ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق (ب جـ̂ د) = ق (أ جـ̂ ب)

∴ جـ ب ينصف أ جـ̂ د **المطلوب الأول**

ق (أ̂) = ١٨٠ − (٦٥ + ٦٥) = ٥٠°

٣ **في الشكل المقابل :**

س أ ، س ب مماسان

ق (أ س̂ ب) = ٧٠°

ق (د جـ̂ ب) = ١٢٥°

اثبت أن: ١- أ ب ينصف د أ̂ س

٢- أ د // س ب

الحل

∵ أ ب جـ د رباعى دائرى ∴ ق (جـ̂) + ق (د أ̂ ب) = ١٨٠

∴ ق (د أ̂ ب) = ١٨٠ − ١٢٥ = ٥٥° ← (١)

∵ س أ ، س ب مماسان للدائرة ∴ س أ = س ب

∴ Δ س أ ب متساوى الساقين

∴ ق (س أ̂ ب) = (١٨٠ − ٧٠) / ٢ = ٥٥° ← (٢)

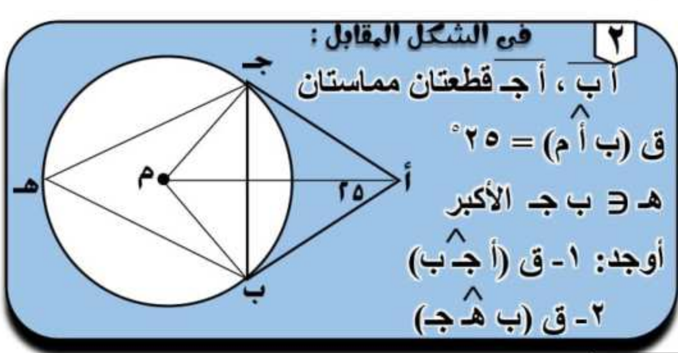
من ١ ، ٢ ينتج أن: ق(د أ̂ ب) = ق (س أ̂ ب)

∴ أ ب ينصف د أ̂ س **المطلوب الأول**

∵ ق (د أ̂ س) = ٥٥ + ٥٥ = ١١٠°

∴ ق(د أ̂ س) + ق(س̂) = ١١٠ + ٧٠ = ١٨٠ وهما متداخلتان

∴ أ د // س ب



٢ **في الشكل المقابل :**

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

ق (ب أ̂ م) = ٢٥°

هـ ∈ ب جـ الأكبر

أوجد: ١- ق (أ جـ̂ ب)

٢- ق (ب هـ̂ جـ)

الحل

∵ أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان ∴ أ م ينصف أ̂

∴ ق (أ̂) = ٢ × ٢٥ = ٥٠°

في Δ أ جـ ب : ق (أ جـ̂ ب) = (١٨٠ − ٥٠) / ٢ = ٦٥° **أولا**

∵ أ جـ مماسة ، م جـ نصف قطر ∴ م جـ ⊥ أ جـ

∴ ق (أ جـ̂ م) = ٩٠°

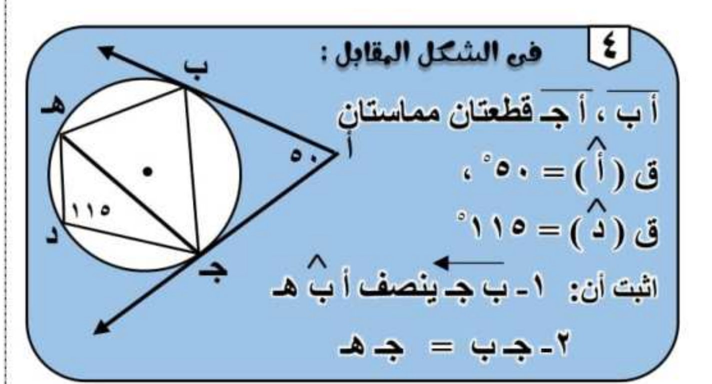
كذلك ∵ أ ب مماسة ، م ب نصف قطر ∴ م ب ⊥ أ ب

∴ ق (أ ب̂ م) = ٩٠°

في الشكل الرباعى أ ب م جـ

ق (جـ م̂ ب) = ٣٦٠ − (٥٠ + ٩٠ + ٩٠) = ١٣٠°

∴ ق (ب هـ̂ جـ) المحيطية = ½ ق (ب م̂ جـ) المركزية = ٦٥°



٤ **في الشكل المقابل :**

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

ق (أ̂) = ٥٠° ،

ق (د̂) = ١١٥°

اثبت أن: ١- ب جـ ينصف أ ب̂ هـ

٢- جـ ب = جـ هـ

الحل

∵ أ ب = أ جـ قطعتان مماستان

∴ ق (أ ب̂ جـ) = (١٨٠ − ٥٠) / ٢ = ٦٥° ← (١)

∵ ب جـ د هـ رباعى دائرى

∴ ق (جـ ب̂ هـ) = ١٨٠ − ١١٥ = ٦٥° ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق (أ ب̂ جـ) = ق (جـ ب̂ هـ) ← (٣)

∴ ب جـ ينصف أ ب هـ **المطلوب الأول**

∵ ق (أ ب̂ جـ) المماسية = ق (جـ هـ̂ ب) المحيطية ← (٤)

من ٣ ، ٤ ينتج أن : ق (جـ ب̂ هـ) = ق (جـ هـ̂ ب)

∴ جـ ب = جـ هـ **المطلوب الثانى**

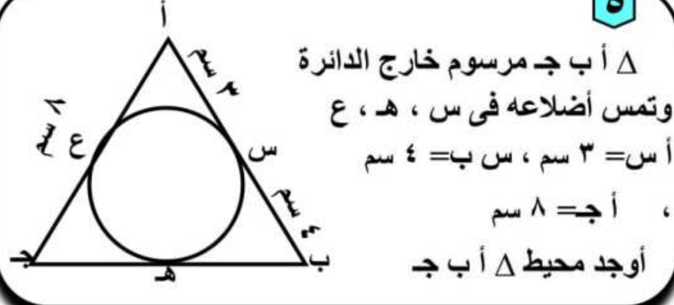
٥

∆ أ ب جـ مرسوم خارج الدائرة وتمس أضلاعه فى س ، هـ ، ع

أ س = ٣ سم ، س ب = ٤ سم

، أ جـ = ٨ سم

أوجد محيط ∆ أ ب جـ



الحل

∵ أ س = أ ع **قطعتان مماستان**

∴ أ ع = ٣ سم

∴ ع جـ = ٨ – ٤ = ٥ سم

∵ جـ ع = جـ هـ **قطعتان مماستان**

∴ جـ هـ = ٥ سم

∵ ب هـ = ب س **قطعتان مماستان**

∴ ب هـ = ٤ سم

∴ ب جـ = ٤ + ٥ = ٩ سم

∴ محيط = ٧ + ٨ + ٩ = ٢٤ سم

٦

م ، ن دائرتان متماستان في د

$\overleftrightarrow{\text{د جـ}}$ مماس مشترك عند د

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك عند أ ، ب

اثبت أن: ١) جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

٢) أ د ⊥ ب د

الحل

في الدائرة م ∵ جـ د ، جـ أ قطعتان مماستان

∴ جـ د = جـ أ ← (١)

في الدائرة ن ∵ جـ د ، جـ ب قطعتان مماستان

∴ جـ د = جـ ب ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: جـ أ = جـ ب

∴ جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ **المطلوب الأول**

في ∆ أ د ب : ∵ جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ د جـ متوسط

∵ د جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب ∴ د جـ خارج من زاوية قائمة

∴ $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب د}}$ **المطلوب الثانى**

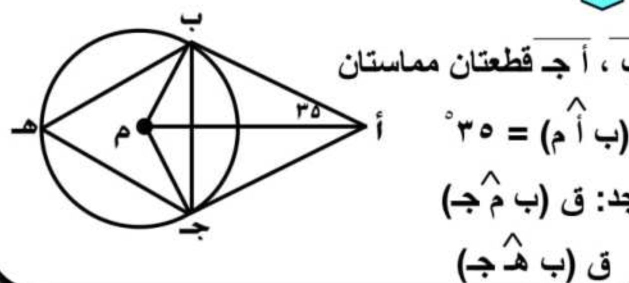
٧

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ قطعتان مماستان

ق (ب $\hat{\text{أ}}$ م) = ٣٥°

أوجد: ق (ب $\hat{\text{م}}$ جـ)

، ق (ب $\hat{\text{هـ}}$ جـ)



الحل

....

....

....

....

....

....

....

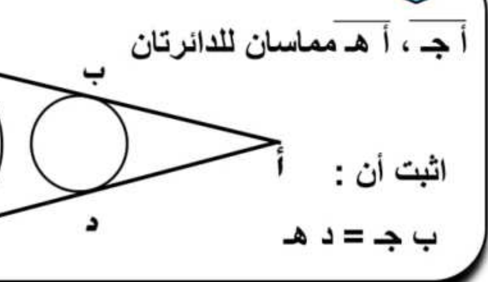
....

٨

$\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ مماسان للدائرتان

اثبت أن :

ب جـ = د هـ



الحل



....

....

....

....

....

....

....

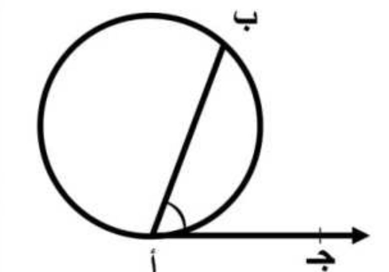
....



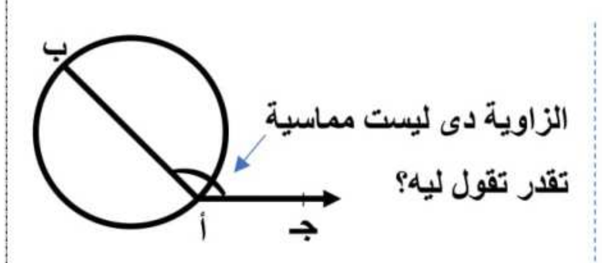
الزاوية المماسية

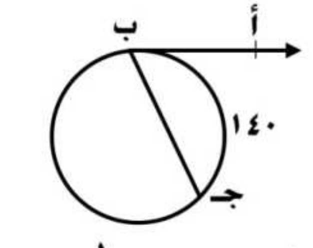
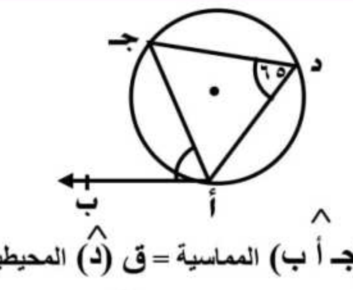
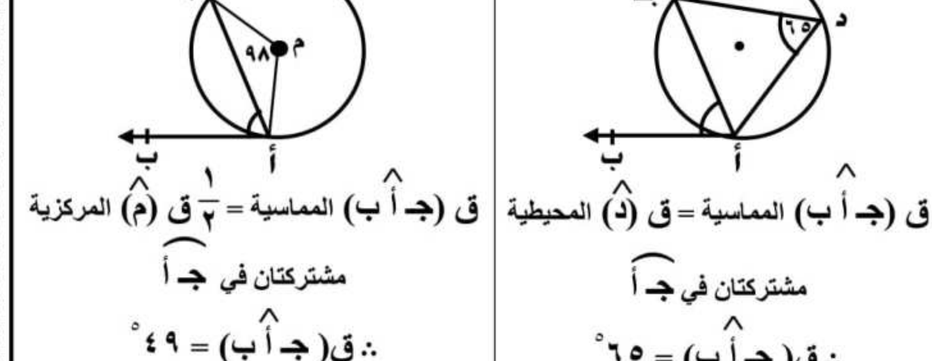
إعداد / محمود عوض

الزاوية المماسية | هي زاوية رأسها على الدائرة ومحصورة بين وتر ومماس



- ب أ جـ زاوية مماسية
- القوس المقابل لها هو $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$

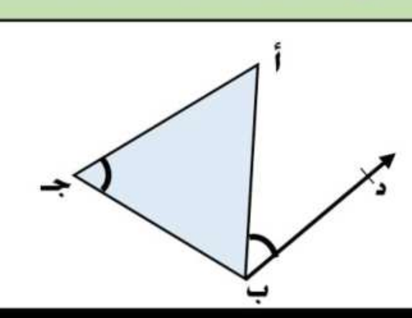


قياس الزاوية المماسية = **نصف قياس القوس المقابل لها** زى المحيطية بالظبط	قياس الزاوية المماسية = **قياس الزاوية المحيطية** المشتركة معها في القوس	قياس الزاوية المماسية = **نصف قياس الزاوية المركزية** المشتركة معها في القوس
 ق (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) ∴ ق(أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ٧٠°	 ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) المماسية = ق ($\hat{\text{د}}$) المحيطية مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{جـ أ}}$ ∴ ق(جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٦٥°	 ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق ($\hat{\text{م}}$) المركزية مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{جـ أ}}$ ∴ ق(جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٤٩°

لإثبات أن $\overleftarrow{\text{ب د}}$ مماس للدائرة التي تمر برؤوس △ أ ب جـ

نثبت أن :

ق (أ $\hat{\text{ب}}$ د) = ق ($\hat{\text{جـ}}$)



تصميم محمود عوض
معلم اول رياضيات

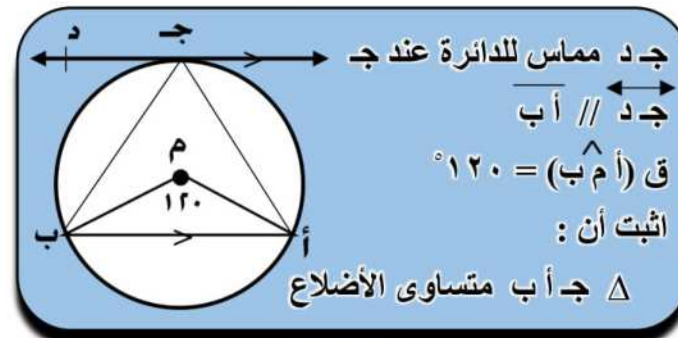
جـ د مماس للدائرة عند جـ

جـ د // أ ب

ق (أ م ب) = ١٢٠°

اثبت أن :

△ جـ أ ب متساوى الأضلاع



الحل

∵ جـ د // أ ب

∴ ق (د جـ ب) = ق (جـ ب أ) بالتبادل ⟵ (١)

∵ ق (د جـ ب) المماسية = ق (جـ أ ب) المحيطية ⟵ (٢)

<u>من ١ ، ٢ ينتج أن</u> : ق (جـ ب أ) = ق (جـ أ ب)

∴ △ جـ أ ب متساوى الساقين

∵ ق (م) المركزية = ١٢٠° ∴ ق (أ جـ ب) = ٦٠°

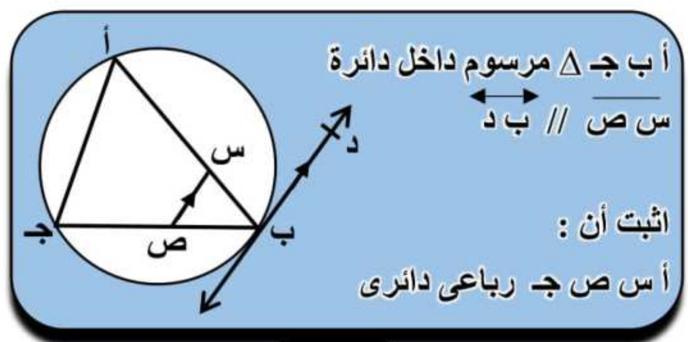
∴ △ جـ أ ب متساوى الأضلاع

أ ب جـ △ مرسوم داخل دائرة

س ص // ب د

اثبت أن :

أ س ص جـ رباعى دائرى



الحل

∵ س ص // ب د

∴ ق (أ ب د) = ق (ص س ب) بالتبادل ⟵ (١)

∵ ق (أ ب د) المماسية = ق (جـ) المحيطية ⟵ (٢)

<u>من ١ ، ٢ ينتج أن</u> :

ق (ص س ب) = ق (جـ)

أي أن : قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

∴ الشكل أ س ص جـ رباعى دائرى

٣ فى الشكل المقابل :

أ س مماس مشترك

لدائرتين متماستين

اثبت أن :

ب د // جـ هـ

الحل

<u>فى الدائرة الصغرى :</u>

∵ ق (س أ ب) المماسية = ق (أ د ب) المحيطية ⟵ (١)

مشتركتان في القوس أ ب

<u>فى الدائرة الكبرى :</u>

ق (س أ جـ) المماسية = ق (أ هـ جـ) المحيطية ⟵ (٢)

لأنهما مشتركتان في القوس أ جـ

<u>من ١ ، ٢ ينتج أن</u> :

ق (أ د ب) = ق (أ هـ جـ) وهما في وضع تناظر

∴ ب د // جـ هـ

٤ فى الشكل المقابل :

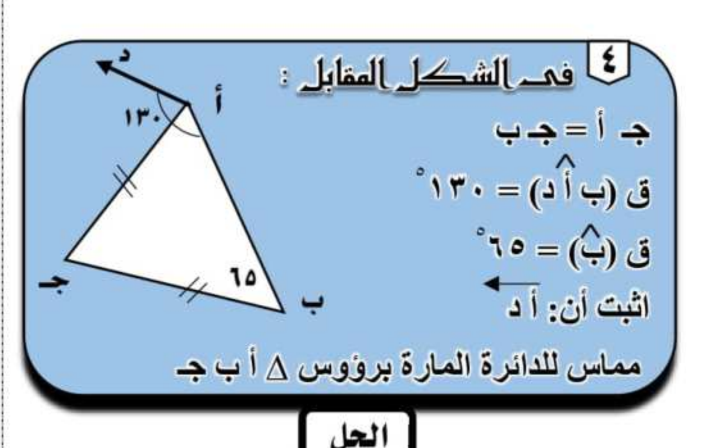
جـ أ = جـ ب

ق (ب أ د) = ١٣٠°

ق (ب) = ٦٥°

اثبت أن: أ د

مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب جـ



الحل

∵ جـ أ = جـ ب

∴ ق (جـ أ ب) = ق (ب) = ٦٥°

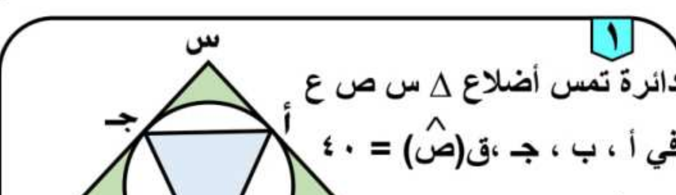
∴ ق (د أ جـ) = ١٣٠ ـ ٦٥ = ٦٥°

∴ ق (د أ جـ) = ق (ب)

∴ أ د مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب جـ



١



دائرة تمس أضلاع $\triangle$ س ص ع

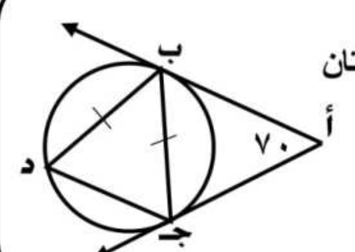
في أ ، ب ، جـ ،ق($\hat{\text{ص}}$) = ٤٠

،ق($\hat{\text{ع}}$) = ٦٤

أوجد قياسات زوايا $\triangle$ أ ب جـ

الحل

٢



أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

ب جـ = ب د

ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٧٠°

أوجد: ق (أ $\hat{\text{ب}}$ د)

الحل

٣

أ ب جـ $\triangle$ قائم في أ

ق (د $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٦٠° ، أ جـ = ٤سم

ب جـ = ٨ سم ، اثبت أن:

$\overleftarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة المارة برؤوس أ ب جـ

الحل

٤

أ ب جـ $\triangle$ مرسوم داخل دائرة

$\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة

$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

اثبت أن: $\overleftarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة

المارة برؤوس $\triangle$ أ س ص

الحل

أسئلة اختر على الهندسة

١ عدد محاور التماثل لأى دائرة هو ....

أ) صفر　ب) ١　جـ) ٢　د) عدد لا نهائي

٢ عدد محاور تماثل نصف الدائرة هو ....

أ) صفر　ب) ١　جـ) ٢　د) عدد لا نهائي

٣ وتر طوله ٨ سم في دائرة طول نصف قطرها ٥ سم فإنه يبعد عن مركزها .... سم

أ) ٣　ب) ٤　جـ) ٥　د) ٨

٤ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة م = Φ فإن المستقيم ل يكون ....

أ) محور تماثل　ب) خارج　جـ) قاطع　د) مماس

٥ إذا كان المستقيم مماسا للدائرة التي قطرها ٨ سم فإنه يبعد عن مركزها .... سم

أ) ٣　ب) ٤　جـ) ٦　د) ٨

٦ دائرة محيطها ٦ π سم والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣ سم فإن المستقيم ل يكون ....

أ) مماس للدائرة　ب) قاطع للدائرة　جـ) خارج الدائرة　د) قطر في الدائرة

٧ خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على .... وينصفه

أ) القطر　ب) الوتر　جـ) الوتر المشترك　د) المماس

٨ دائرتان م ، ن متماستان من الداخل ، أنصاف أقطارهم ٥ سم ، ٩ سم فإن م ن = ... سم

أ) ١٤　ب) ٤　جـ) ٥　د) ٩

٩ م ، ن دائرتان متقاطعتان وطولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٢ سم فإن م ن ∋ ....

أ)] ٣ ، ٧ [　ب) [٣ ، ٧ [　جـ)] ٣ ، ٧]　د) [٣ ، ٧]

١٠ إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ } وطول نصف قطر أحدهما ٣ سم ، م ن = ٨ سم
فإن طول نصف قطر الأخرى = ... سم

أ) ٥　ب) ٦　جـ) ١١　د) ١٦

١١ إذا كان الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج وطول نصف قطر إحداهما ٥ سم ، م ن = ٩ سم
فإن طول نصف قطر الأخرى = ... سم

أ) ٤　ب) ٥　جـ) ٩　د) ١٤

١٢ م دائرة طول قطرها ٧ سم ، أ نقطة في مستوى الدائرة وكان م أ = ٤ سم فإن أ تقع ....

أ) داخل الدائرة　ب) خارج الدائرة　جـ) على الدائرة　د) على مركز الدائرة

١٣ عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو . . . .

أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) ٣

١٤ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

أ) المثلث ب) المربع جـ) المعين د) المستطيل

١٥ يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

أ) معين ب) مستطيل جـ) شبه منحرف د) متوازى أضلاع

١٦ مركز الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع . . . .

أ) متوسطات المثلث ب) ارتفاعات المثلث جـ) محاور تماثل أضلاعه د) منصفات زواياه الداخلة

١٧ مركز الدائرة الخارجة لأى مثلث هو نقطة تقاطع . . . .

أ) متوسطات المثلث ب) ارتفاعات المثلث جـ) محاور تماثل أضلاعه د) منصفات زواياه الداخلة

١٨ قياس القوس الذى يمثل ثلث قياس الدائرة = ...

أ) ٣٦٠ ب) ١٨٠ جـ) ١٢٠ د) ٩٠

١٩ النسبة بين قياس الزاوية المحيطية وقياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس = ...

أ) ١ : ٢ ب) ١ : ٣ جـ) ٢ : ١ د) ٣ : ١

٢٠ طول نصف الدائرة التي طول نصف قطرها نق سم = ... سم

أ) ٢ π نق ب) $\frac{١}{٤}$ π نق جـ) $\frac{١}{٣}$ π نق د) π نق

٢١ قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة = ...

أ) °٤٥ ب) °٩٠ جـ) °١٢٠ د) °١٨٠

٢٢ أ ب جـ د شكل رباعى دائرى فيه ق (أ) = °٦٠ فإن ق (جـ) = ...

أ) °٦٠ ب) °٣٠ جـ) °٩٠ د) °١٢٠

٢٣ إذا كان الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى وكان ق ($\hat{\text{أ}}$) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\hat{\text{جـ}}$) فإن ق ($\hat{\text{أ}}$) = ...

أ) °٩٠ ب) °٦٠ جـ) °١٢٠ د) °١٨٠

٢٤ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج = ...

أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) ٣

٢٥ المماسان المرسومان من نهايتى قطر في دائرة يكونان ....

أ) متوازيان ب) منطبقان جـ) متقاطعان د) متساويان في الطول

٢٦ الزاوية المماسية هي زاوية محصورة بين ....

أ) وتران　　ب) مماسان　　جـ) وتر ومماس　　د) وتر و قطر

٢٧ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتان هو ....

أ) ١　　ب) ٢　　جـ) ٣　　د) ٤

٢٨ الزاوية المحيطية التي تقابل قوسا أصغر في الدائرة تكون ....

أ) منعكسة　　ب) قائمة　　جـ) منفرجة　　د) حادة

٢٩ الشكل الرباعى الدائرى في الأشكال التالية هو ....

أ) المعين　　ب) المستطيل　　جـ) متوازى الأضلاع　　د) شبه المنحرف

أسئلة اختر على الرسومات

١ **في الشكل المقابل** : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م

م ب = ٦ سم ، أ ب = ٨ سم فإن أ م = ... سم

أ) ٥　　ب) ١٠　　جـ) ١٢　　د) ١٣

٢ **في الشكل المقابل** : دائرة مركزها م

إذا كان ق (أ ب⌢) = ٥٠° فإن ق (أ د^ ب) = ...

أ) ٢٥°　　ب) ٥٠°　　جـ) ١٠٠°　　د) ١٥٠°

٣ **في الشكل المقابل** : دائرة مركزها م

ق (م أ^ ب) = ٥٠° فإن ق (جـ^) = ...

أ) ٥٠°　　ب) ٨٠°　　جـ) ٤٠°　　د) ٣٠°

٤ **في الشكل المقابل** : $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$

ق (أ جـ⌢) = ٣٠° فإن ق (ب هـ^ د) = ...

أ) ١٠°　　ب) ١٥°　　جـ) ٣٠°　　د) ٦٠°

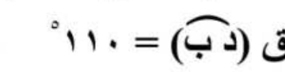
٥ **في الشكل المقابل** : أ ب جـ Δ متساوى الأضلاع

فإن ق (ب م^ جـ) = ...

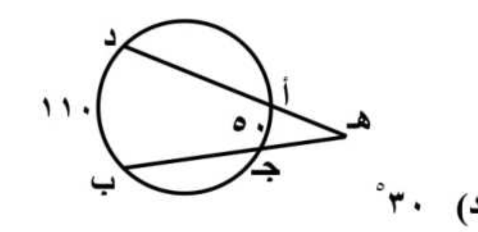
أ) ٥٠°　　ب) ٦٠°　　جـ) ١٢٠°　　د) ١٠٠°



في الشكل المقابل : ق (أجـ⌒) = ٥٠°،



ق (د ب⌒) = ١١٠° فإن ق (هـ^) = ...

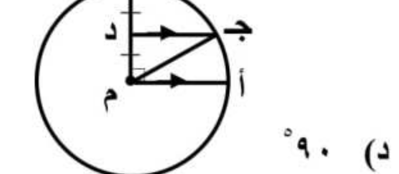


أ) ٦٠° ب) ٥٠° جـ) ٤٠° د) ٣٠°



في الشكل المقابل : أم // جـ د ، م د = د ب

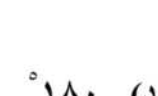
ق (أ م^ ب) = ٩٠° فإن ق (أجـ⌒) = ...

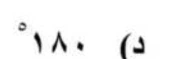


أ) ٤٥° ب) ٦٠° جـ) ٣٠° د) ٩٠°

في الشكل المقابل : ق (أ^) = ١٢٠°

فإن ق (جـ^) = ...



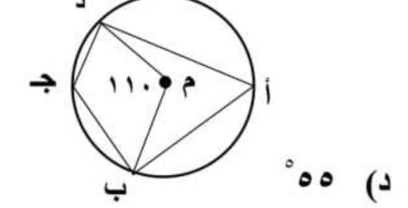


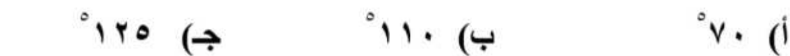
أ) ٦٠° ب) ٩٠° جـ) ١٢٠° د) ١٨٠°



في الشكل المقابل : دائرة مركزها م

ق (ب م^ د) = ١١٠° فإن ق (جـ^) = ...



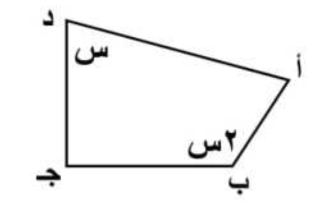


أ) ٧٠° ب) ١١٠° جـ) ١٢٥° د) ٥٥°



في الشكل المقابل : أ ب جـ د شكل رباعى دائرى

فإن س = ...



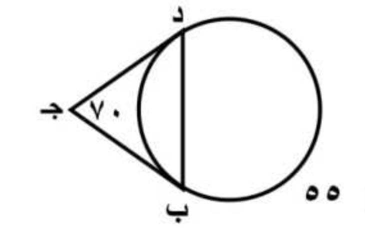


أ) ١٢٠ ب) ١٠٠ جـ) ٦٠ د) ٥٠



في الشكل المقابل : جـ ب ، جـ د قطعتان مماستان

ق (جـ) = ٧٠° فإن ق(د ب) الأصغر = ...°

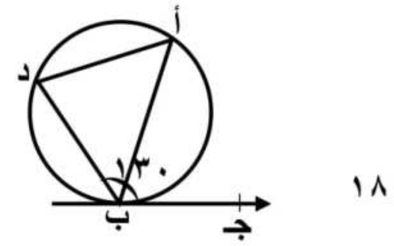


أ) ٧٠ ب) ١١٠ جـ) ١٢٥ د) ٥٥



في الشكل المقابل : ب جـ مماس للدائرة

ق (د ب^ جـ) = ١٣٠° فإن ق(أ^) = ...°



أ) ٥٠ ب) ٦٥ جـ) ١٣٠ د) ١٨٠

تعالوا بينا نحل مسائل **نماذج امتحانات الكتاب المدرسى** اللى دايما بييجى منها في الامتحان عشان مهمة جدًا جدا و تعتبر أهم من مسلسل سلسال الدم



اختر تراكمى

١- مساحة المعين الذى طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم = ... سم٢

الحل: مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولا قطريه = $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم٢

٢- مجموع طولى أي ضلعين في المثلث . . . . طول الضلع الثالث

٣- في المثلث أ ب جـ إذا كان (أ جـ)٢ = (أ ب)٢ + (ب جـ)٢ فإن زاوية ب تكون . . . .

٤- في المثلث أ ب جـ إذا كان (أ جـ)٢ > (أ ب)٢ + (ب جـ)٢ فإن زاوية ب تكون . . . .

٥- في المثلث أ ب جـ إذا كان (أ جـ)٢ < (أ ب)٢ + (ب جـ)٢ فإن زاوية ب تكون . . . .

٦- قياس زاوية الشكل السداسى المنتظم = ...

٧- عدد محاور تماثل المربع = ... ، عدد محاور تماثل المستطيل = ...

٨- ميل المستقيم الذى معادلته ٣ س − ٤ ص + ١٢ = ٠ هو . . . .

٩- ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ...

١٠- عدد محاور تماثل نصف الدائرة . . . . عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين

١١- القطران المتساويان في الطول وغير متعامدان في . . . .

١٢- مربع محيطه ٢٠ سم تكون مساحته = ... سم٢

١٣- إذا كان أ ب قطر فى دائرة م حيث أ (٣ ، −٥) ، ب (٥ ، ١) فإن مركز الدائرة م هو

١٤- دائرة محيطها ٨ π فإن طول قطرها = ...

١٥- في المثلث القائم طول المتوسط الخارج من الزاوية القائمة يساوى . . . .

١٦- في المثلث القائم طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ يساوى . . . .

١٧- عدد المستطيلات في الشكل المقابل . . . .

انتهت المذكرة مع تمنياتى الخالصة لكم بالتوفيق والنجاح والاستمرار في النجاح



(١)

أ ب قطر فى الدائرة م
ق (جـ أ^ ب) = ٣٠°
د منتصف أ⌒جـ
١- أوجد ق(ب د^ جـ) ، ق (أ⌒د)
٢- اثبت أن : أ ب // جـ د

الحل

∵ ق (ب د^ جـ) = ق (جـ أ^ ب)
محيطيتان مشتركتان فى جـ⌒ب

∴ ق (ب د^ جـ) = ٣٠° *أولا*
∴ ق(جـ⌒ب) = ٢ × ٣٠ = ٦٠°

∵ ق (أ⌒د جـ) + ق (جـ⌒ب) = ١٨٠°
∴ ق(أ⌒د جـ) = ١٨٠ – ٦٠ = ١٢٠°

∵ ق (أ⌒د) = ق (د⌒جـ) ∴ ق (أ⌒د) = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠°

∴ ق(د ب^ أ) المحيطية = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠°

∵ ق (ب د^ جـ) = ق (د ب^ أ) وهما متبادلتان ∴ أب//جـ د

(٢)

أ ب ، أجـ وتران متساويان فى الطول
س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ
ق (جـ أ^ ب) = ٧٠°
١- أوجد ق (د م^ هـ)
٢- اثبت أن س د = ص هـ

الحل

∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب
∴ ق (م س^ أ) = ٩٠°

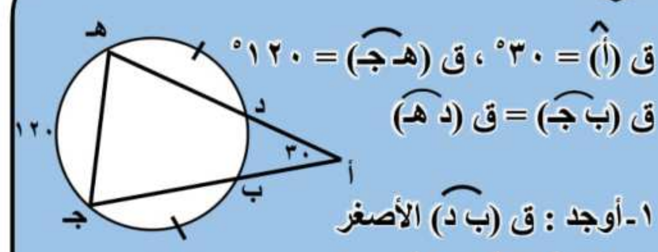
∵ ص منتصف أ جـ ∴ م ص ⊥ أ جـ
∴ ق (م ص^ أ) = ٩٠°

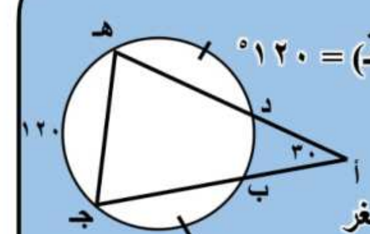
∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى أ س م ص = ٣٦٠°
∴ ق (د م^ هـ) = ٣٦٠ – (٩٠ + ٩٠ + ٧٠) = ١١٠°

∵ أ جـ = أ ب (أوتار متساوية)
∴ م ص = م س (أبعاد متساوية) ⟵ (١)
∵ م هـ = م د (أنصاف أقطار) ⟵ (٢)

بطرح ١ من ٢ ينتج: ص هـ = س د *المطلوب الثانى*

(٣)





ق (أ^) = ٣٠° ، ق (هـ⌒جـ) = ١٢٠°
ق (ب⌒جـ) = ق (د⌒هـ)
١-أوجد : ق (ب⌒د) الأصغر
٢-اثبت أن : أ ب = أ د

الحل

من تمرين مشهور ٢ :

ق (ب⌒د) = ق (هـ⌒جـ) – ٢ ق(أ^) = ١٢٠ – ٦٠ = ٦٠°

∵ ق (د⌒هـ) = ق (ب⌒جـ) بإضافة د ب للطرفين

∴ ق (ب⌒د هـ) = ق (د⌒ب جـ)

∴ ق (جـ^) المحيطية = ق (هـ^) المحيطية

∴ أ جـ = أ هـ ⟵ (١)

∵ ق (د⌒هـ) = ق (ب⌒جـ) ∴ دهـ = ب جـ ⟵ (٢)

بطرح ٢ من ١ ينتج أن: أ ب = أ د

(٤)

جـ منتصف أ ب
ق (م أ^ ب) = ٢٠°
أوجد : ق (ب هـ^ د) ، ق (أ⌒د ب)

الحل

∵ م أ = م ب أنصاف أقطار
∴ Δ م أ ب متساوى الساقين ∴ ق(م ب^ أ) = ٢٠°
∵ جـ منتصف أ ب ∴ م جـ ⊥ أ ب ∴ ق(م جـ^ ب) = ٩٠°
فى Δ م جـ ب : ق (جـ م^ ب) = ١٨٠ – (٩٠ + ٢٠) = ٧٠°

∵ ق (ب هـ^ د) = $\frac{١}{٢}$ ق (د م^ ب)
محيطية ومركزية مشتركتان فى أ⌒ب

∴ ق (ب هـ^ د) = ٣٥° *المطلوب الأول*

فى Δ أ م ب: ق (أ م^ ب) = ١٨٠ – (٢٠ + ٢٠) = ١٤٠°
∴ ق (أ⌒د ب) = ق (أ م^ ب) المركزية = ١٤٠°

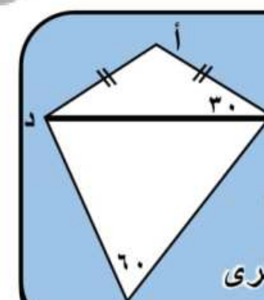
٥

أ ب جـ د شكل رباعى فيه

أ ب = أ د

ق (أ بَ د) = ٣٠°، ق (جـَ) = ٦٠°

اثبت أن: الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى



الحل

∵ أ ب = أ د ∴ ∆ أ ب د متساوى الساقين

∴ ق (أ دَ ب) = ٣٠°

∴ ق(أَ) = ١٨٠ – (٣٠ + ٣٠) = ١٢٠°

∴ ق (أَ) + ق (جـَ) = ١٢٠ + ٦٠ = ١٨٠°

وهما زاويتان متقابلتان متكاملتان

∴ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

٦

أ و مماس للدائرة عند أ

أ و // د هـ

برهن أن :

د هـ ب جـ شكل رباعى دائرى

الحل

∵ أ و // د هـ

∴ ق (و أَ ب) = ق (أ هـَ د) بالتبادل ← (١)

∵ ق (و أَ ب) المماسية = ق (جـَ) المحيطية ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (أ هـَ د) = ق (جـَ)

ونلاحظ أن أ هـ د زاوية خارجة ، جـ هي المقابلة للمجاورة

∴ الشكل د هـ ب جـ رباعى دائرى

٧

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

د ب مماس للدائرة عند ب

س ص // ب د

اثبت أن:

أ س ص جـ رباعى دائرى

الحل

∵ س ص // ب د

∴ ق (أ بَ د) = ق (ص سَ ب) بالتبادل ← (١)

∵ ق (أ بَ د) المماسية = ق (جـَ) المحيطية ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (ص سَ ب) = ق (جـَ)

أي أن : قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

∴ الشكل أ س ص جـ رباعى دائرى

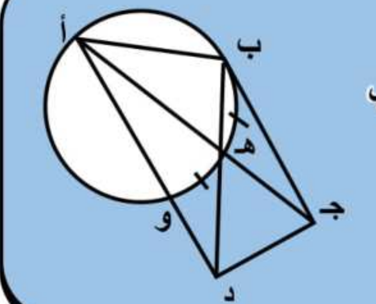
٨

ب جـ مماس للدائرة عند ب

هـ منتصف ب و

اثبت أن :

أ ب جـ د رباعى دائرى



الحل

∵ ق (ب هـ) = ق (هـ و)

∴ ق (ب أَ هـ) = ق (هـ أَ و) ← (١)

∵ ق (ب أَ هـ) المحيطية = ق (جـ بَ هـ) المماسية ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (جـ بَ هـ) = ق (هـ أَ و)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهى جـ د وفى جهة واحدة منها

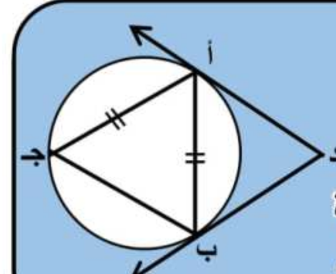
∴ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

٩

د أ ، د ب مماسين

أ ب = أ جـ

اثبت أن : أ جـ مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب د



الحل

في △ أ ب جـ : ∵ أ ب = أ جـ

∴ ق (أ ب̂ جـ) = ق (أ جـ̂ ب) ⟵ (١)

في △ أ ب د : ∵ دأ = د ب لأنهما قطعتان مماستان

∴ ق (د أ̂ ب) = ق (د ب̂ أ) ⟵ (٢)

∵ ق (د أ̂ ب) المماسية = ق (أ جـ̂ ب) المحيطية ⟵ (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ وبمقارنة المثلثين ينتج أن :

ق (ب أ̂ جـ) = ق (د̂)

∴ أ جـ مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب د

١٠

△ أ ب جـ مرسوم خارج الدائرة م وتمس أضلاعه أب ، أجـ ، ب جـ في د ، هـ ، و على الترتيب

أد= ٥سم ، ب هـ= ٤سم ،جـ و= ٣سم

أوجد محيط △ أ ب جـ

الحل

∵ أ د ، أ و قطعتان مماستان ∴ أ د = أ و = ٥سم

∵ ب د ، ب هـ قطعتان مماستان ∴ ب د = ب هـ = ٤ سم

∵ جـ هـ ، جـ و قطعتان مماستان ∴جـ هـ = جـ و = ٣سم

∴ أ ب = ٥ + ٤ = ٩ سم ، أ جـ = ٥ + ٣ = ٨ سم

ب جـ = ٤ + ٣ = ٧ سم

∴ محيط △ أ ب جـ = ٩ + ٨ + ٧ = ٢٤ سم

تصميم محمود عوض
معلم اول رياضيات

١١

أ ب ، أ جـ مماسان للدائرة

ق (أ̂) = ٧٠°

ق (جـ د̂ هـ) = ١٢٥°

اثبت أن : ١- جـ ب = جـ هـ

٢- أ جـ // ب هـ

الحل

∵ الشكل د جـ ب هـ رباعي دائرى

∴ ق (جـ ب̂ هـ) = ١٨٠ – ١٢٥ = ٥٥° ⟵ (١)

∵ أ جـ ، أ ب قطعتان مماستان

∴ ق (أ جـ̂ ب) = ق (أ ب̂ جـ) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = ٥٥°

∵ ق (ب هـ̂ جـ) المحيطية = ق (أ جـ̂ ب) المماسية = ٥٥° ⟵ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق(جـ ب̂ هـ) = ق(ب هـ̂ جـ)

∴ △ جـ ب هـ متساوى الساقين ∴ جـ ب = جـ هـ أولا

∵ ق (أ جـ̂ ب) = ق (جـ ب̂ هـ) = ٥٥°

وهما متبادلتان ∴ أ جـ // ب هـ

١٢

دائرتان متماستان من الداخل فى ب

أ ب مماس مشترك للدائرتين

أجـ مماس للصغرى، أب مماس للكبرى

أ جـ = ١٥ سم ، أب = (٢س-٣) سم

أ د = (ص-٢) سم أوجد قيمة س ، ص

الحل

∵ أ ب = أ جـ قطعتان مماستان للدائرة الصغرى

∴ أ ب = ١٥ ∴ ٢س – ٣ = ١٥ ٢س = ١٨

∴ س = ٩

∵ أ ب = أ د قطعتان مماستان للدائرة الكبرى

∴ أ د = ١٥ ∴ ص - ٢ = ١٥

∴ ص = ١٧